

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Grupos de Bieberbach metabelianos
com quociente derivado finito**

CARLOS FREDERICO DO AMARAL CID

1999

Índice

Introdução	2
1 Grupos de Bieberbach	5
1.1 Teoremas de Bieberbach	5
1.2 Variedades <i>Flat</i>	8
1.3 Classificação de Grupos de Bieberbach	9
2 Grupos de Bieberbach com <i>point-group</i> $C_{p^n} \times C_{p^m}$	14
2.1 O grupo $K(p^n, p^m)$	15
3 Automorfismos	21
3.1 IA-Automorfismos	23
3.2 Automorfismos Externos	28
4 Quocientes de $K(p^n, p^m)$	33
4.1 Quocientes derivados de elementos de $\Lambda_{p,1,m}$	36
4.2 Quocientes de $K(p, p^2)$	43
4.3 Os grupos $K(2, 8)$ e $K(4, 4)$	50
5 Métodos Computacionais	65
5.1 CARAT e Algoritmos	67
5.2 Grupos de Bieberbach de dimensão 5	70
5.2.1 Grupos de dimensão 5 com centro trivial	71

Introdução

Um grupo de Bieberbach G de dimensão n é um grupo livre de torção satisfazendo à sequência exata curta

$$0 \rightarrow V \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow 1,$$

onde P é um grupo finito agindo fielmente sobre o subgrupo abeliano livre V de posto n . Os grupos V e P são conhecidos como o *subgrupo de translações* e o *point-group* (ou *grupo de holonomia*) de G , respectivamente. Esta noção surgiu de grupos de isometrias do espaço Euclidiano n -dimensional, com região fundamental compacta. Os grupos de Bieberbach são grupos cristalográficos livres de torção.

Os grupos de Bieberbach aparecem também como grupos fundamentais de variedades Riemannianas compactas *flat* (i.e., de curvatura nula). Uma variedade Riemanniana n -dimensional compacta é *flat* se, e somente se, seu grupo fundamental for um grupo de Bieberbach de dimensão n . Além disso, duas variedades Riemannianas compactas *flat* possuem grupos fundamentais isomorfos se, e somente se, forem difeomorfas. Então a classificação das variedades Riemannianas compactas *flat* n -dimensionais equivale à classificação de grupos de Bieberbach de dimensão n .

Este trabalho consiste em um estudo de grupos de Bieberbach metabelianos tendo como *point-group* e quociente derivado p -grupos abelianos finitos, p primo. Se G for o grupo fundamental de uma variedade *flat* X , segue de [18] que o primeiro número de Betti de X é nulo se, e somente se, o quociente derivado de G for finito. Devido à *construção de Calabi* [9], variedades com primeiro número de Betti nulo possuem importância especial na classificação das variedades compactas *flat* em geral. No Capítulo 1 descrevemos alguns resultados preliminares relacionados a grupos de Bieberbach, que serão relevantes em nosso trabalho.

Em [15], Gupta e Sidki mostram que todo grupo de Bieberbach com quociente derivado finito e *point-group* isomorfo a $C_p \times C_p$, p primo, possui um subgrupo isomorfo

ao grupo

$$K(p) = \langle a, b \mid (a^p)^{t(p,b)}, (b^p)^{t(p,a)}, [[a, b], a^p], [[a, b], b^p], \text{ metabeliano} \rangle,$$

onde $t(s, x) = \sum_{i=0}^{s-1} x^i$ e a apresentação é na variedade dos grupos metabelianos. Em particular, o grupo $K(2)$ é isomorfo ao grupo fundamental da variedade de Hantzsche-Wendt [16]. No Capítulo 2, generalizamos a classe $K(p)$ e definimos uma família de grupos metabelianos, através da apresentação

$$K(p^n, p^m) = \langle a, b \mid (a^{p^n})^{t(p^m,b)}, (b^{p^m})^{t(p^n,a)}, [[a, b], a^{p^n}], [[a, b], b^{p^m}], \text{ metabeliano} \rangle,$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$, e provamos

Teorema A. *Seja G um grupo de Bieberbach com quociente derivado finito e point-group isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$, onde $n, m \in \mathbb{N}$ e p é primo. Então G possui um subgrupo isomorfo a um quociente livre de torção de $K(p^n, p^m)$. Além disso, $K(p^n, p^m)$ também é um grupo Bieberbach de mesmo tipo.*

No Capítulo 3, estudamos o grupo de automorfismos de $K(p^n, p^m)$. Como $K(p^n, p^m)$ possui centro trivial, nos concentramos em encontrar o grupo de automorfismos externos $\text{Out}(K(p^n, p^m))$. Neste caso, se X for uma variedade *flat* tendo grupo fundamental isomorfo a $K(p^n, p^m)$, então $\text{Out}(K(p^n, p^m))$ é isomorfo ao grupo de afinidades $\text{Aff}(X)$.

Teorema B. *Seja G o grupo $K(p^n, p^m)$.*

- a) Se $(p, n, m) = (2, 1, 1), (3, 1, 1), (2, 1, 2)$ ou $(2, 2, 2)$, então $\text{Out}(G)$ é isomorfo a um subgrupo de $GL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}})$, sendo desta forma um grupo finito;*
- b) Nos outros casos, $\text{Out}(G)$ é extensão de um subgrupo abeliano de $GL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}})$ por um grupo cristalográfico.*

Gupta e Sidki mostram em [15] que $K(p, p)$ não possui quocientes próprios livres de torção. No Capítulo 4, estudamos os quocientes livres de torção de alguns casos $K(p^n, p^m)$. Em particular, obtemos informações sobre tais quocientes de $K(p, p^m)$ e mostramos

Teorema C. *Existe um grupo metabeliano, finitamente gerado, livre de torção, com quociente derivado isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$ se, e somente se $n, m \geq 2$.*

Além disso, descrevemos os quocientes livres de torção dos grupos $K(p, p^2)$, $K(2, 8)$ e $K(4, 4)$. Utilizando a lista dos quocientes de $K(4, 4)$, mostramos

Teorema D. *Se G for um grupo metabeliano, finitamente gerado, livre de torção, com quociente derivado isomorfo a $C_4 \times C_4$, então G é isomorfo a*

$$K(2, 2) = \langle a, b \mid (a^2)^{1+b}, (b^2)^{1+a}, [[a, b], a^2], [[a, b], b^2], \text{ metabeliano} \rangle,$$

o grupo fundamental da variedade de Hantzsche-Wendt.

No Capítulo 5, estudamos alguns métodos computacionais utilizados na classificação de grupos de Bieberbach. Em particular, descrevemos a implementação de um algoritmo que decide se um grupo cristalográfico é livre de torção (i.e, se é grupo de Bieberbach). Utilizando este algoritmo, apresentamos a lista completa de representantes de classes de isomorfismo de grupos de Bieberbach de dimensão 5 com quociente derivado finito.

Capítulo 1

Grupos de Bieberbach

Apresentamos neste Capítulo alguns fatos históricos e conceitos importantes para o presente trabalho. Uma referência para o assunto é [10].

1.1 Teoremas de Bieberbach

Seja M_n o grupo de movimentos rígidos de \mathbb{R}^n , i.e., o conjunto de pares ordenados (M, s) , onde $M \in O(n, \mathbb{R})$, o grupo das matrizes reais ortogonais $n \times n$, e $s \in \mathbb{R}^n$. O grupo M_n é o grupo das isometrias do espaço Euclidiano n -dimensional. A ação de um elemento $(M, s) \in M_n$ em $x \in \mathbb{R}^n$ é da forma

$$(M, s).x = M.x + s.$$

Vamos denotar por A_n o conjunto de pares ordenados (M, s) , com $M \in GL(n, \mathbb{R})$ e $s \in \mathbb{R}^n$. O grupo A_n é conhecido como grupo das transformações afins de \mathbb{R}^n . É claro que $M_n \leq A_n$.

Se considerarmos \mathbb{R}^n como um subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, temos que todo elemento de A_n se estende unicamente a um elemento de $GL(n+1, \mathbb{R})$, da forma

$$(M, s) \mapsto \begin{pmatrix} M & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $s \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, e 0 corresponde à linha de n zeros. A representação acima é conhecida como a *representação afim* de A_n .

Podemos definir um homomorfismo ϕ da forma

$$\begin{aligned} \phi : \quad M_n &\rightarrow O(n, \mathbb{R}) \\ (M, s) &\mapsto M. \end{aligned}$$

Se Γ for um subgrupo de M_n , temos que a imagem de Γ por ϕ é conhecida como a *parte linear (ou rotacional)* de Γ . O núcleo de ϕ , que vamos denotar por $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$, é chamado o *subgrupo das translações* de Γ . Ele corresponde ao subgrupo de Γ composto dos elementos que possuem um número finito de conjugados.

Definição 1.1 *Um subgrupo $\Gamma \leq M_n$ é chamado um subgrupo cristalográfico de M_n se Γ age de modo descontínuo em \mathbb{R}^n e o espaço quociente \mathbb{R}^n/Γ for compacto. Um subgrupo de Bieberbach de M_n é um subgrupo cristalográfico de M_n livre de torção.*

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemática em Paris, D. Hilbert apresentou uma lista de problemas que considerava importantes e que ainda permaneciam sem solução. O 18º problema, de grande interesse no tratamento matemático da cristalografia na época, era a questão :

O número de grupos de isometrias (essencialmente diferentes) agindo no espaço Euclidiano n -dimensional com domínio fundamental compacto é finito ?

Em 1910, L. Bieberbach obteve resposta positiva para o problema, mostrando que existia apenas um número finito de classes de isomorfismos de tais grupos. Logo em seguida, Frobenius notou que, do ponto de vista cristalográfico, a equivalência afim (conjugação por elemento de A_n) era uma relação mais natural que o isomorfismo, e em 1911 provou a conjectura com respeito à equivalência afim. Finalmente, em 1912 Bieberbach mostrou que as duas noções eram de fato equivalentes. Enunciamos abaixo os 3 Teoremas de Bieberbach.

Teorema 1.1 (***Bieberbach** [5], [6]*)

1. *Se $\Gamma \leq M_n$ for um subgrupo cristalográfico de M_n , então o subgrupo de translações $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ é um subgrupo normal, abeliano livre de posto n e índice finito.*
2. *Dois subgrupos cristalográficos de M_n são isomorfos se, e somente se, forem conjugados em A_n .*
3. *Para todo n , existe apenas um número finito de classes de isomorfismo de subgrupos cristalográficos de M_n .*

Desta forma, temos que um subgrupo cristalográfico Γ de M_n satisfaz à sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \Gamma \cap \mathbb{R}^n \longrightarrow \Gamma \longrightarrow P \longrightarrow 1,$$

onde $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ é abeliano livre de posto n e P é um grupo finito agindo sobre $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ por conjugação, sendo essa ação fiel. Definimos agora a noção abstrata de grupo de cristalográfico.

Definição 1.2 *Um grupo cristalográfico é um grupo G contendo um subgrupo normal, abeliano maximal V , livre de torção, de posto e índice finitos. Um grupo de Bieberbach é um grupo cristalográfico livre de torção.*

Pode-se provar que este subgrupo normal, abeliano maximal V é único. O subgrupo V e o quociente G/V são conhecidos como o *subgrupo de translações* e o *point-group* (ou *grupo de holonomia*) de G , respectivamente. A *dimensão* de um grupo cristalográfico é o posto de V . Já vimos que se Γ for um subgrupo cristalográfico de M_n , então ele satisfaz as condições acima. A recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.2 (Auslander e Kuranishi [2]) *Se G for um grupo cristalográfico abstrato de dimensão n , então existe um monomorfismo $\phi: G \hookrightarrow M_n$, tal que $\phi(G)$ é subgrupo cristalográfico de M_n .*

Gostaríamos de fazer uma observação sobre a terminologia usada, que segue [10]. Em alguns trabalhos mais antigos, o que definimos aqui como “subgrupo cristalográfico de M_n ” era chamado de “grupo de Bieberbach”. Grupos cristalográficos eram tais grupos de dimensão 3, e o que definimos aqui por “subgrupo de Bieberbach de M_n ” e “grupo de Bieberbach” eram denominados “grupo de Bieberbach livre de torção” e “grupo de Bieberbach abstrato livre de torção”, respectivamente. A razão é que, historicamente, os grupos estudados por Bieberbach foram os subgrupos de M_n , discretos e com região fundamental compacta, que foram chamados então de *grupos de Bieberbach*. Os que possuíam importância no estudo da cristalografia eram tais grupos em dimensão 3, daí a terminologia *grupos cristalográficos*. A idéia de se estudar em particular os grupos livres de torção surgiu bem mais tarde, quando do estudo das variedades *flat* (próxima seção). Autores mais recentes utilizam a terminologia usada aqui, além de não diferenciarem entre as noções de “subgrupos de Bieberbach de M_n ” e “grupos (abstratos) de Bieberbach” (de acordo com o Teorema anterior).

1.2 Variedades *Flat*

Nesta seção introduziremos algumas noções sobre variedades Riemannianas *flat* e sua relação com grupos de Bieberbach. Para mais detalhes, ver [36] e [10].

Sejam X uma variedade diferenciável e Γ um grupo de Lie. Uma *ação diferenciável* de Γ em X é uma aplicação diferenciável $F : \Gamma \times X \rightarrow X$, tal que $\gamma \mapsto F(\gamma, \cdot)$ é um homomorfismo de Γ no grupo de difeomorfismos de X . Esta ação é chamada *livre* (ou livre de pontos fixos) se, para todo $x \in X$, o subgrupo de Γ definido por $\{\gamma \in \Gamma | F(\gamma, x) = x\}$ for trivial. Além disso, o conjunto de órbitas é chamado *espaço quociente da ação de Γ em X* e é denotado por $\frac{X}{\Gamma}$.

Podemos mostrar que se Γ for um subgrupo M_n , agindo livremente e de modo descontínuo em \mathbb{R}^n , então $\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$ é uma variedade n -dimensional. Agora, se Γ age de modo descontínuo em \mathbb{R}^n , então Γ age livremente se, e somente se, for livre de torção. Em particular, se Γ for grupo de Bieberbach, então $\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$ será uma variedade compacta.

Sejam X uma variedade diferenciável e \mathfrak{X} o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em X . Uma *conexão afim* é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ satisfazendo às propriedades da derivação. Se Y for variedade diferenciável com conexão ∇ e $\phi : X \rightarrow Y$ for um difeomorfismo, então podemos obter de modo natural uma conexão $\bar{\nabla}$ em X induzida por ϕ . Se X possui conexão e ela coincide com a induzida por ϕ , dizemos que X e Y são *afinamente equivalentes*.

Seja $x \in X$. Dado um caminho fechado c com ponto base em x , o transporte paralelo ao longo de c induz uma transformação linear no espaço tangente $T_x(X)$. O conjunto de todas transformações lineares induzidas por transportes paralelos ao longo dos caminhos fechados com ponto base x forma um grupo, que chamamos o *grupo de holonomia de X em x* .

Vimos que se Γ for um grupo de Bieberbach de dimensão n , então $X = \frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$ é uma variedade diferenciável n -dimensional. Além disso, a projeção $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$ é um recobrimento universal de X , e Γ é isomorfo ao grupo fundamental de X . O *point-group* de Γ será isomorfo ao grupo de holonomia de X , que será finito.

Dada uma conexão ∇ de X , podemos introduzir uma curvatura R em X . Dizemos que X é variedade *flat* se R for identicamente nula. O Teorema de Holonomia de Ambrose-Singer [1] nos diz que *R é identicamente nula se, e somente se, o grupo de holonomia de X for totalmente desconexo*. Mas se Γ for grupo de Bieberbach, o grupo de holonomia de $X = \frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$ será finito, e desta forma, X é variedade compacta

flat. O Teorema a seguir nos garante que se considerarmos a conexão de Levi-Civita, a recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.3 *Seja X uma variedade Riemanniana (completa e conexa) flat n -dimensional. Então existe $\Gamma \leq M_n$, discreto e livre de torção, tal que X é isométrica a $\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$. Se X for compacta, então Γ é grupo de Bieberbach de dimensão n .*

Enunciamos agora os Teoremas de Bieberbach no contexto de variedades *flat*.

Teorema 1.4 (*Bieberbach*)

1. *Se X for uma variedade Riemanniana compacta flat, então X é recoberto por um toro flat e este recobrimento é uma isometria local. Além disso, o grupo de holonomia de X é finito.*
2. *Duas variedades Riemannianas compactas emphflat são afinamente equivalentes se, e somente se, possuírem grupos fundamentais isomorfos.*
3. *Para todo n , existe apenas um número finito de classes de equivalência afim de variedades Riemannianas compactas emphflat n -dimensionais.*

Então a classificação das variedades Riemannianas compactas *flat* n -dimensionais equivale à classificação dos grupos de Bieberbach de mesma dimensão.

1.3 Classificação de Grupos de Bieberbach

Vimos que se G for um grupo de Bieberbach de dimensão n , então G é livre de torção e satisfaz à sequência exata curta

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow 1,$$

onde V é abeliano livre de posto n e P é grupo finito agindo fielmente em V . A extensão acima nos dá origem a um elemento $\alpha \in H^2(P, V)$, o segundo grupo de cohomologia. Abaixo descrevemos os problemas enfrentados na construção e classificação dos grupos de Bieberbach.

1. Classificar os grupos finitos P que possam ser realizados como *point-group* de um grupo de Bieberbach;

2. Encontrar representação integral V de P ;
3. Obter $\alpha \in H^2(P, V)$ tal que a extensão associada seja livre de torção;
4. Decidir se duas extensões são isomorfas.

O Teorema abaixo nos dá o resultado necessário para o item 1.

Teorema 1.5 (*Auslander e Kuranishi [2]*) *Seja P um grupo finito. Então existe grupo de Bieberbach com point-group isomorfo a P .*

O item 2 equivale ao estudo dos subgrupos finitos de $GL(n, \mathbb{Z})$.

Agora sejam dois grupos P e Q , e um P -módulo V . Se $F : Q \rightarrow P$ for um homomorfismo, podemos tornar V um Q -módulo se definirmos para todo $g \in Q$ e $v \in V$, a ação $g.v = F(g).v$. Vamos denotar este Q -módulo também por V . Temos então que F induz um homomorfismo

$$F^* : H^2(P, V) \rightarrow H^2(Q, V).$$

Da mesma forma, se M for um outro P -módulo e $f : V \rightarrow M$ for um P -homomorfismo, então f induz um homomorfismo

$$f_* : H^2(P, V) \rightarrow H^2(P, M).$$

Definição 1.3 *Sejam V e M dois P -módulos. Um homomorfismo semi-linear de V em M é um par (f, σ) , com $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, M)$ e $\sigma \in \text{Aut}(P)$, tais que para quaisquer $x \in P$ e $v \in V$, temos $f(x.v) = \sigma(x).f(v)$.*

Então para os itens 3 e 4, temos os seguintes Teoremas; ver [10], cap. III.

Teorema 1.6 *Sejam V um P -módulo e G a extensão associada a $\alpha \in H^2(P, V)$. Então G é livre de torção se, e somente se, para toda inclusão $i : C_p \hookrightarrow P$, C_p cíclico de ordem prima p , temos $i^*(\alpha) \neq 0$, onde $i^* : H^2(P, V) \rightarrow H^2(C_p, V)$ é o homomorfismo induzido por i .*

Uma classe $\alpha \in H^2(P, V)$ satisfazendo às condições do Teorema é chamada *especial*.

Teorema 1.7 *Sejam V e M dois P -módulos fiéis. Se G for a extensão associada a $\alpha \in H^2(P, V)$ e K for a extensão associada a $\beta \in H^2(P, M)$, então G é isomorfo a K se, e somente se, existir um homomorfismo semi-linear (f, σ) de V em M tal que f é bijeção e*

$$f_*(\alpha) = \sigma^*(\beta).$$

Sendo assim, o estudo da classificação de grupos de Bieberbach segue principalmente em duas direções: dado n , encontrar os grupos de Bieberbach n -dimensionais; e dado grupo finito P , encontrar os grupos de Bieberbach com *point-group* isomorfo a P .

As maiores dificuldades surgem quando do cálculo de representações integrais de P e obtenção de $\alpha \in H^2(P, V)$ especial. De fato, a teoria de representações integrais é muito complexa e até certo ponto incompleta. E mesmo nos casos em que temos tais representações, não são simples os cálculos de $H^2(P, V)$ e das restrições de seus elementos a subgrupos cíclicos.

Em [8], podemos encontrar a listagem completa dos grupos cristalográficos de dimensão ≤ 4 . No Capítulo 5, descrevemos os cálculos realizados para obtenção dos grupos de Bieberbach de dimensão 5. Charlap [10] obteve a classificação de grupos de Bieberbach com *point-group* cíclico de ordem prima. Em [29] encontramos classificação completa para quando o *point-group* for isomorfo ao grupo diedral.

Poderíamos também buscar processos indutivos (em relação à dimensão) para classificação de grupos de Bieberbach. Seja X variedade Riemanniana compacta *flat*, com grupo fundamental G . Se denotarmos por $b_1(X)$ o primeiro número de Betti de X , então $b_1(X) = 0$ se, e somente se, $\frac{G}{G'}$ for finito. O Teorema abaixo nos fornece uma forma indutiva de classificação de variedades compactas *flat* com $b_1 \neq 0$.

Teorema 1.8 (Calabi [9]) *A classificação das classes de equivalência afim de variedades Riemannianas compactas flat n -dimensionais segue de:*

1. *a classificação das classes de equivalência afim de variedades compactas flat de dimensão $< n$;*
2. *a classificação das classes de equivalência afim de variedades compactas flat n -dimensionais com $b_1 = 0$;*
3. *a classificação das classes de equivalência afim de grupos abelianos finitos Δ de difeomorfismos afins de variedades compactas flat de dimensão $\leq n$;*

A construção acima é conhecida como *construção de Calabi*. Desta forma, poderíamos considerar as variedades compactas *flat* com $b_1 = 0$ como objetos "irreduzíveis". Vimos que para qualquer grupo finito P , existe variedade compacta *flat* X com grupo de holonomia isomorfo a P . Em contraste a este resultado, nem todo grupo finito pode ser realizado como grupo de holonomia de uma variedade compacta *flat* com primeiro número de Betti nulo. Seguindo a terminologia de Hiller e Sah [18], chamamos um grupo finito P *primitivo* se ele for isomorfo ao grupo de holonomia de uma variedade compacta *flat* com primeiro número de Betti nulo.

Teorema 1.9 [18] *Um grupo finito P é primitivo se, e somente se, não possuir p -subgrupo de Sylow cíclico com complemento normal.*

Em particular, todo p -grupo finito não cíclico é primitivo. Alguns resultados relacionados com grupos de Bieberbach com quociente derivado finito ($b_1 = 0$) podem ser encontrados em, por exemplo, [12],[15],[16],[18],[19], [30],[31].

Em [35], Vasquez introduz um outro método indutivo de classificação de variedades *flat*. Ele define as chamadas *extensões flat-torais*. Uma extensão flat-toral é uma forma de construirmos uma nova variedade compacta *flat* através de um toro *flat* e uma variedade compacta *flat* X , com a dimensão sendo igual à soma das dimensões de ambas. Em [35], Vasquez mostra que para todo grupo finito P , existe $n(P) \in \mathbb{Z}$, tal que se X for uma variedade Riemanniana compacta *flat* com grupo de holonomia isomorfo a P , então X é uma extensão flat-toral de uma variedade Riemanniana compacta *flat* de dimensão $\leq n(P)$. Isto equivale ao fato que se G for um grupo de Bieberbach com subgrupo de translações V e *point-group* isomorfo a P , então existe $A \leq V$, tal que $\frac{G}{A}$ é grupo de Bieberbach com dimensão $\leq n(P)$. A construção acima pode ser vista de alguma forma como "dual" da construção de Calabi; ver [37]. Em [34], [11], encontramos valores de n para alguns grupos finitos. Em particular, quando P for um p -grupo, $n(P) = \sum_{C \in \wp} [P : C]$, onde \wp é o conjunto de representantes de classes de conjugação de subgrupos de ordem prima de P .

Em nosso trabalho, estudamos grupos de Bieberbach com quociente derivado finito e *point-group* isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$. De acordo com o Teorema A, a classificação dos grupos de Bieberbach 2-gerados com estas propriedades equivale à classificação dos quocientes livres de torção de $K(p^n, p^m)$. Através deste estudo, obtemos também algumas propriedades gerais de grupos metabelianos livres de torção, com quociente

derivado finito. No Capítulo 5, estudamos métodos computacionais utilizados na classificação de grupos de Bieberbach. Em particular, descrevemos a implementação de algoritmo que decide se um grupo cristalográfico é livre de torção, e obtemos assim a lista dos grupos de Bieberbach de dimensão 5 com quociente derivado finito.

Capítulo 2

Grupos de Bieberbach com *point-group* $C_{p^n} \times C_{p^m}$

Iniciamos neste Capítulo o estudo de grupos de Bieberbach com quociente derivado finito e *point-group* isomorfo $C_{p^n} \times C_{p^m}$. Note que estes são grupos metabelianos livres de torção. Além disso, podemos também mostrar que possuem centro trivial.

Lema 2.1 *Um grupo cristalográfico possui quociente derivado finito se, e somente se, tiver centro trivial.*

Dem. Vamos denotar por V o subgrupo de translações do grupo cristalográfico G . Como V é subgrupo abeliano maximal de G , o centro de G coincide com $C_V(G)$, o centralizador de G em V . Suponha que $\frac{G}{G'}$ seja finito. Seja $\tau : G \rightarrow V$ o homomorfismo transfer de G em V . Como $G' \leq \ker(\tau)$, temos que τ induz de forma natural o homomorfismo $\bar{\tau} : \frac{G}{G'} \rightarrow V$. Como $\frac{G}{G'}$ é finito e V é livre de torção, então tanto $\bar{\tau}$ como τ devem ser triviais. Então se $z \in Z(G) \leq V$ e $n = [G : V]$, temos que $\tau(z) = z^n = e$ e desta forma $z = e$.

Seja agora $Z(G) = \{e\}$. Vamos denotar por M o $\mathbb{Q}[\frac{G}{V}]$ -módulo $\mathbb{Q} \otimes V$. Além disso, sejam $[G, M]$ e $C_M(G)$ submódulos de M definidos como $\mathbb{Q} \otimes [G, V]$ e $\mathbb{Q} \otimes C_V(G)$, respectivamente. Como $\frac{G}{V}$ é finito, o submódulo $[G, M]$ é somando direto de M e de fato temos $M = C_M(G) \oplus [G, M]$. Logo o subgrupo $C_V(G) \oplus [G, V]$ possui índice finito em V . Se $\frac{G}{G'}$ não for finito, então $G' \cap V$ terá índice infinito em V . Como $[G, V] \leq G' \cap V$, o subgrupo $[G, V]$ também terá índice infinito em V e devemos ter então $Z(G) = C_V(G) \neq \{e\}$. Chegamos assim a uma contradição. ■

Podemos também repetir parte da demonstração do Lema anterior para mostrarmos que se um grupo de Bieberbach possuir quociente derivado finito, então o *point-group* não pode ser cíclico finito. Vamos também mostrar que o subgrupo de translações de um grupo cristalográfico é único.

Lema 2.2 *Sejam G um grupo cristalográfico e V o subgrupo de translações de G . Se A for um subgrupo abeliano normal de G , então $A \leq V$.*

Dem. Como A e V são subgrupos abelianos normais de G , temos que $AV \trianglelefteq G$, de classe de nilpotência ≤ 2 . Como V é abeliano maximal, se $A \not\leq V$, devemos ter $\text{cl}(AV) = 2$. Sejam $v \in V$, $a \in A$ e $[G : V] = n$. Temos que

$$[v, a]^n = [v, a^n] = e,$$

e como V é livre de torção e $[v, a] \in V$, então $[v, a] = e$. Desta forma AV é abeliano e $A \leq V$. ■

2.1 O grupo $K(p^n, p^m)$

Seja

$$F_n = \langle x_1, \dots, x_n | \text{metabeliano} \rangle$$

o grupo livre de posto n na variedade dos grupos metabelianos. Um grupo metabeliano finitamente gerado G é apresentado como

$$\langle x_1, \dots, x_n | R_1, R_2, \dots, R_s, \text{metabeliano} \rangle \cong F_n / \langle R_1, R_2, \dots, R_s \rangle^{F_n}.$$

Vamos definir os seguintes polinômios, para $s \in \mathbb{N}$:

$$t(s, x) = 1 + x + \dots + x^{s-1}$$

$$d(x) = x - 1$$

$$l(s, x) = (t(s, x) - s)/d(x) = \sum_{i=1}^{s-1} t(s, x) = \sum_{i=0}^{s-2} (s - i - 1)x^i.$$

E se g, x_1, \dots, x_n são elementos de um grupo G , e $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}$, então vamos denotar por $g^{s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n}$ o elemento $(g^{s_1})^{x_1} (g^{s_2})^{x_2} \dots (g^{s_n})^{x_n}$.

Sempre que for conveniente, utilizaremos notação aditiva nos subgrupos abelianos de G . Note que quando o subgrupo derivado G' de G for abeliano, utilizando a notação de módulos à direita, podemos escrever

$$[x_1, x_2^s] = [x_1, x_2] \cdot t(s, x_2).$$

Proposição 2.1 *Seja G um grupo de Bieberbach com quociente derivado finito e point-group isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e p é primo. Então G possui um subgrupo isomorfo a um quociente livre de torção de*

$$K(p^n, p^m) = \langle a, b \mid (a^{p^n})^{t(p^m, b)}, (b^{p^m})^{t(p^n, a)}, [[a, b], a^{p^n}], [[a, b], b^{p^m}], \text{ metabeliano} \rangle.$$

Dem. Seja V o subgrupo de translações de G . Se $a, b \in G$ são os geradores de G modulo V , seja H o subgrupo de G gerado por a e b . É claro que $a^{p^n}, b^{p^m} \in V$. Como $\frac{G}{V}$ é abeliano, teremos $G' \leq V$. Logo tanto G como H são metabelianos e $[[a, b], a^{p^n}] = [[a, b], b^{p^m}] = e$.

Além disso, segue do Lema 2.1 que o centro de G é trivial. Logo

$$(a^{p^n})^{t(p^m, b)} = (b^{p^m})^{t(p^n, a)} = e,$$

pois ambos os elementos são centralizados por a, b e V . Logo H é imagem homomórfica de $K(p^n, p^m)$. ■

Em particular, todo grupo de Bieberbach 2-gerado, com quociente derivado finito e point-group isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$, deverá ser isomorfo a um quociente livre de torção de $K(p^n, p^m)$. Agora vamos mostrar que $K(p^n, p^m)$ também é grupo de Bieberbach deste tipo.

Proposição 2.2 *Seja*

$$K(p^n, p^m) = \langle a, b \mid (a^{p^n})^{t(p^m, b)}, (b^{p^m})^{t(p^n, a)}, [[a, b], a^{p^n}], [[a, b], b^{p^m}], \text{ metabeliano} \rangle,$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ e p é primo. Então $K(p^n, p^m)$ é um grupo de Bieberbach de dimensão $p^{n+m} - 1$, com point-group isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$ e quociente derivado isomorfo a $C_{p^{n+m}} \times C_{p^{n+m}}$.

Dem. Vamos denotar $K(p^n, p^m)$ por G e $[a, b]$ por c . Podemos supor que $m \geq n$. Segue da apresentação de G que $G/G' \cong C_{p^{n+m}} \times C_{p^{n+m}}$, e que como $\frac{G}{G'}$ -módulo, o subgrupo derivado G' é cíclico gerado por c . Se denotarmos a ação de a e b em G' por A e B , respectivamente, temos que G' é gerado por $c.A^i B^j$, com $0 \leq i, j < p^{n+m}$. Vamos adotar a notação aditiva em G' .

Como G é metabeliano, as relações de G' podem ser obtidas pela comutação dos geradores de G com as relações de G ; ver [15]. Já temos

$$c.(A^{p^n} - 1) = c.(B^{p^m} - 1) = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} [(a^{p^n})^{t(p^m, b)}, a] &= [a^{p^n} \cdot (a^{p^n})^b \dots (a^{p^n})^{b^{p^m-1}}, a] \\ &= [a^{p^n}, a] + [(a^{p^n})^b, a] + \dots + [(a^{p^n})^{b^{p^m-1}}, a]. \end{aligned}$$

Mas $[(a^{p^n})^{b^i}, a] = [a^{p^n} [a^{p^n}, b^i], a] = [[a^{p^n}, b^i], a] = [a^{p^n}, b^i] \cdot d(A)$. Então

$$\begin{aligned} [(a^{p^n})^{t(p^m, b)}, a] &= ([a^{p^n}, b] + [a^{p^n}, b^2] + \dots + [a^{p^n}, b^{p^m-1}]) \cdot d(A) \\ &= ([a, b] + [a, b^2] + \dots + [a, b^{p^m-1}]) \cdot t(p^n, A) d(A) \\ &= c \cdot l(p^m, B) (A^{p^n} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, $[(b^{p^m})^{t(p^n, a)}, b]$ vai nos dar $c \cdot l(p^n, A) (B^{p^m} - 1) = 0$. Se fizermos os cálculos com $[(a^{p^n})^{t(p^m, b)}, b] = 0$, teremos

$$\begin{aligned} [(a^{p^n})^{t(p^m, b)}, b] &= [a^{p^n}, b] + [(a^{p^n})^b, b] + \dots + [(a^{p^n})^{b^{p^m-1}}, b] \\ &= [a^{p^n}, b] + [a^{p^n}, b]^b + \dots + [a^{p^n}, b]^{b^{p^m-1}} \\ &= [a^{p^n}, b] \cdot t(p^m, B) = [a, b] \cdot t(p^n, A) t(p^m, B), \end{aligned}$$

ou seja, $c \cdot t(p^n, A) t(p^m, B) = 0$. Esta expressão é equivalente a $[a^{p^n}, b^{p^m}] = e$. Da mesma forma, $[(b^{p^m})^{t(p^n, a)}, a]$ resultará a mesma relação. Nenhuma nova relação será obtida através dos comutadores $[c, a^{p^n}]$, $[c, b^{p^m}]$ e da condição *metabeliano*. Então G' é um subgrupo abeliano de G gerado pelo conjunto $\{c \cdot A^i B^j, 0 \leq i \leq p^n, 0 \leq j \leq p^m\}$ e com relações

$$\begin{aligned} c \cdot t(p^n, A) t(p^m, B) &= 0 \\ c \cdot (A^{p^n} - 1) &= 0 \\ c \cdot (B^{p^m} - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando o *Diamond Lemma* de Newman e a estratégia de *Resolução de Ambiguidade* de Bergman [4], concluimos que G' é abeliano livre de posto $p^{n+m} - 1$, com geradores livres

$$S = \{c \cdot A^i B^j, 0 \leq i < p^n, 0 \leq j < p^m, (i, j) \neq (p^n - 1, p^m - 1)\}.$$

Considere agora $V = \langle a^{p^n}, b^{p^m}, G' \rangle$. É fácil verificar que V é um subgrupo normal, abeliano maximal de G e $G/V \cong C_{p^n} \times C_{p^m}$.

Como $a^{p^{n+m}}, b^{p^{n+m}} \in G'$, podemos representá-los em função da base S de G' .

$$\begin{aligned} (a^{p^n})^{t(p^m, b)} &= (a^{p^n}) (a^{p^n})^b \dots (a^{p^n})^{b^{p^m-1}} \\ &= a^{p^n} a^{p^n} [a^{p^n}, b] a^{p^n} [a^{p^n}, b^2] \dots a^{p^n} [a^{p^n}, b^{p^m-1}] \\ &= p^m a^{p^n} + [a^{p^n}, b] \cdot l(p^m, B) \\ &= p^m a^{p^n} + c \cdot t(p^n, A) l(p^m, B). \end{aligned}$$

Então

$$p^m a^{p^n} = -c.t(p^n, A)l(p^m, B).$$

Da mesma forma, teremos

$$p^n b^{p^m} = c.t(p^m, B)l(p^n, A).$$

Logo V é gerado por $\{a^{p^n}, b^{p^m}, c.A^i B^j, 0 \leq i < p^n, 0 \leq j < p^m, i+j \leq p^n + p^m - 4\}$. Mas então V é um grupo abeliano gerado por $p^{n+m} - 1$ elementos, contendo um subgrupo abeliano livre G' de mesmo posto. Logo V também é abeliano livre de posto $p^{n+m} - 1$, com geradores livres dados acima.

Temos ainda que mostrar que G é livre de torção. A prova será por indução sobre $n+m$. Primeiro mostraremos que $K(p, p)$ é livre de torção. Se $x \in G(= K(p, p))$, então ele pode ser escrito da forma $x = a^i b^j g'$, onde $g' \in G'$ e $0 \leq i, j \leq p^2 - 1$. Suponha que x tenha ordem finita. Como $x^p \in V$, então devemos ter $x^p = (a^i b^j g')^p = e$. Agora

$$x^p = (a^i b^j g')^p = (a^p)^i (b^p)^j g'',$$

onde $g'' \in G'$. Utilizando a notação aditiva,

$$x^p = ia^p + jb^p + g'' = 0.$$

Então devemos ter $a^{ip} b^{jp} \in G'$, e concluimos assim que p divide i, j . Mas então $x \in V$ e $x = e$. Vamos supor agora que $n + m \geq 3$. Como $m \geq n$, temos que $m \geq 2$ e $t(p^m, x) = t(p^{m-1}, x)t(p, x^{p^{m-1}})$. Logo $K(p^n, p^{m-1})$ é imagem homomórfica de $K(p^n, p^m)$ por

$$\begin{array}{ccc} \varphi: & K(p^n, p^m) & \longrightarrow & K(p^n, p^{m-1}) \\ & a & \longmapsto & \bar{a} \\ & b & \longmapsto & \bar{b} \end{array}$$

pois

$$(\bar{a}^{p^n})^{t(p^m, \bar{b})} = (\bar{a}^{p^n})^{t(p^{m-1}, \bar{b})t(p, \bar{b}^{p^{m-1}})} = e$$

e

$$(\bar{b}^{p^m})^{t(p^n, \bar{a})} = \{(\bar{b}^{p^{m-1}})^{t(p^n, \bar{a})}\}^p = e.$$

Além disso, $[\bar{c}, \bar{b}^{p^m}] = [\bar{c}, \bar{b}^{p^{m-1}}]^p = e$. O núcleo de φ corresponde ao fecho normal em $K(p^n, p^m)$ do subgrupo

$$\langle (a^{p^n})^{t(p^{m-1}, b)}, (b^{p^{m-1}})^{t(p^n, a)}, [c, b^{p^{m-1}}] \rangle.$$

Está claro que $(a^{p^n})^{t(p^{m-1}, b)}, [c, b^{p^{m-1}}] \in V$. Agora

$$\begin{aligned} (b^{p^{m-1}})^a \dots (b^{p^{m-1}})^{a^{p^{n-1}}} &= b^{p^{m-1}} b^{p^{m-1}} [b^{p^{m-1}}, a] \dots b^{p^{m-1}} [b^{p^{m-1}}, a^{p^{n-1}}] \\ &= b^{p^{m+n-1}} g', \end{aligned}$$

onde $g' \in G'$. Então $\ker(\varphi)$ está contido em V , sendo desta forma livre de torção. Por indução, $K(p^n, p^{m-1})$ é livre de torção. Logo $K(p^n, p^m)$, sendo extensão de um grupo livre de torção por um grupo livre de torção, será também livre de torção. Concluimos que $K(p^n, p^m)$ é um grupo de Bieberbach, de dimensão $p^{n+m} - 1$, com *point-group* isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$ e quociente derivado $C_{p^{n+m}} \times C_{p^{n+m}}$. ■

Note que pela fatoração do polinômio $t(p^s, x)$ como $t(p^s, x) = t(p^{s-i}, x)t(p^i, x^{p^{s-i}})$, então o grupo $K(p^n, p^m)$ possui quociente livre de torção isomorfo a $K(p^{n'}, p^{m'})$ para quaisquer $1 \leq n' \leq n$ e $1 \leq m' \leq m$.

Lema 2.3 *Seja G um grupo de Bieberbach de dimensão n . Então todo quociente próprio livre de torção de G é também um grupo de Bieberbach, de dimensão menor que n .*

Dem. Sejam V o subgrupo de translações de G e $Q = \frac{G}{N}$ um quociente próprio livre de torção de G . Temos que

$$\bar{V} = \frac{VN}{N} \cong \frac{V}{V \cap N}$$

é um subgrupo abeliano normal de Q , de índice $s = [G : V]$. Além disso, temos $\{e\} \neq N^s \subseteq V \cap N$. Então \bar{V} é abeliano livre de posto $m < n = \text{posto}(V)$.

Seja $C_Q(\bar{V})$ o centralizador de \bar{V} em Q . Segue do Teorema de Schur que o subgrupo derivado de $C_Q(\bar{V})$ é finito. Mas como Q é livre de torção, temos que $C_Q(\bar{V})$ é um subgrupo normal de Q , abeliano livre de posto m e índice $\leq s$.

Como \bar{V} possui índice finito em Q , então existe subgrupo normal, abeliano maximal $V_Q \geq \bar{V}$ de Q , livre de posto m e índice $\leq s$. Logo Q é grupo de Bieberbach, com $\dim(Q) = m < \dim(G)$. ■

Proposição 2.3 *Sejam $G = K(p^n, p^m)$ e V o subgrupo de translações de G . Se $x, y \in G$ são os geradores de G modulo V , então $H = \langle x, y \rangle \cong G$.*

Dem. Segue da Proposição 2.1 que H é isomorfo a um quociente livre de torção de G . Agora, se mostrarmos que a dimensão de H é a mesma que a de G , podemos utilizar o Lema anterior para concluir que $H \cong G$. Como G' tem índice finito em V , basta então mostrarmos que $\text{posto}(H') = \text{posto}(G')$.

Como $V/G' \leq \Phi(G/G')$, o subgrupo de Frattini de G/G' , temos que x e y são também geradores de G modulo G' , e então $G = G'H$. Como G é metabeliano, temos $H' \trianglelefteq G$ e

$$G' = [G'H, G'H] = G''[G', H]H' = [G', H]H'.$$

Seja $N = (G')^p H'$. Temos $N \trianglelefteq G$, e como G é finitamente gerado, $\frac{G}{N}$ é p -grupo finito. Agora, seguindo parte da demonstração do Teorema 2 de [15], calculamos o segundo e o terceiro termos da série central descendente de $\frac{G}{N}$. Temos

$$\Gamma_2\left(\frac{G}{N}\right) = \left[\frac{G}{N}, \frac{G}{N}\right] = \frac{G'N}{N} = \frac{G'}{N}$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_3\left(\frac{G}{N}\right) &= [\Gamma_2\left(\frac{G}{N}\right), \frac{G}{N}] = \left[\frac{G'}{N}, \frac{G}{N}\right] = \\ &= \frac{[G', G]N}{N} = \frac{[G', G'H]N}{N} = \\ &= \frac{[G', H]H'(G')^p}{N} = \frac{G'(G')^p}{N} = \frac{G'}{N}. \end{aligned}$$

Então $\Gamma_2(\frac{G}{N}) = \Gamma_3(\frac{G}{N})$, e como $\frac{G}{N}$ é nilpotente, $G' = N = (G')^p H'$.

Como G' é livre de torção, H' deve ser subgrupo de um somando direto U de G' , de mesmo posto que H' . Então $G' = U \oplus W$,

$$(G')^p = U^p \oplus W^p$$

e

$$(G')^p H' = G' \leq U \oplus W^p \leq G'.$$

Logo W é trivial e $G' = U$. Então $\text{posto}(H') = \text{posto}(G')$ e $H \cong G$. ■

Note que o grupo $K(2, 2)$ é isomorfo ao grupo fundamental da variedade de Hantzsche-Wendt, o único grupo de Bieberbach de dimensão 3 com quociente derivado finito [16].

Capítulo 3

Automorfismos

Vamos agora estudar o grupo de automorfismos do grupo $K(p^n, p^m)$. Vamos denotar por $Aut(G)$ e $I(G)$ o grupo de automorfismos e o grupo de automorfismos internos de G , respectivamente.

Seja G um grupo de Bieberbach de dimensão n . Vimos no Capítulo 1 que podemos considerar G como um subgrupo de A_n , o grupo das transformações afins de \mathbb{R}^n . Sejam $N(G)$ e $C(G)$ o normalizador e o centralizador de G em A_n , respectivamente. Pode-se mostrar que $C(G)$ é isomorfo a $\mathbb{R} \otimes Z(G)$, onde $Z(G)$ é o centro de G . É claro que sempre existe um monomorfismo de $N(G)/C(G)$ em $Aut(G)$. Mas o segundo Teorema de Bieberbach nos diz que todo isomorfismo entre grupos de Bieberbach pode ser realizado por conjugação por um elemento de A_n . Então, para grupos de Bieberbach, teremos $\frac{N(G)}{C(G)} \cong Aut(G)$.

Sejam P e V o *point-group* e o subgrupo de translações de G , respectivamente. Segue do primeiro Teorema de Bieberbach que podemos considerar P como um subgrupo finito de $GL(n, \mathbb{Z})$. Vamos denotar por $N(P)$ o normalizador de P em $GL(n, \mathbb{Z})$. Podemos definir uma ação de $N(P)$ em $H^2(P, V)$, o segundo grupo de cohomologia; [10], cap. V. Se $\alpha \in H^2(P, V)$ é a classe de cohomologia associada à extensão G , então vamos denotar por $N(P)_\alpha$ o estabilizador de α em $N(P)$. Pode-se mostrar que $P \leq N(P)_\alpha$.

Como V é subgrupo característico de G , existe um homomorfismo natural de $Aut(G)$ em $Aut(V) \cong GL(n, \mathbb{Z})$, cujo núcleo vamos denotar por $C(V)$, o centralizador de V em $Aut(G)$. Como V é abeliano, obviamente os automorfismos internos induzidos por elementos de V estão contidos em $C(V)$. Logo $C(V)$ possui um subgrupo normal isomorfo a $V/Z(G)$. De fato, temos o seguinte resultado :

Teorema 3.1 [10] *Seja G um grupo de Bieberbach. Então o diagrama abaixo é comutativo, sendo que todas as sequências são exatas.*

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 1 & & 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & V/Z(G) & \rightarrow & I(G) & \rightarrow & P \rightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & C(V) & \rightarrow & \text{Aut}(G) & \rightarrow & N(P)_\alpha \rightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & H^1(P, V) & \rightarrow & \text{Out}(G) & \rightarrow & N(P)_\alpha/P \rightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Em particular, o grupo de automorfismos externos $\text{Out}(G)$ possui um subgrupo abeliano isomorfo a $H^1(P, V)$, o primeiro grupo de cohomologia.

Vimos também que os grupos de Bieberbach surgem como grupos fundamentais de variedades Riemannianas compactas *flat*. Se X e Y são variedades Riemannianas, um difeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ que preserva a conexão afim é chamado uma *equivalência afim* entre X e Y ; ver Capítulo 1. Pode-se mostrar que o conjunto das equivalências afins de X em X , que denotamos por $\text{Aff}(X)$, é um grupo de Lie. O grupo $\text{Aff}(X)$ é conhecido como o *grupo de afinidades de X* . Além disso, a componente da identidade $\text{Aff}_0(X)$ é isomorfa a $C(G)/Z(G)$. Ou seja, $\text{Aff}_0(X)$ é um toro de dimensão igual a $b_1(X)$, o primeiro número de Betti de X .

Teorema 3.2 [10] *Seja G o grupo fundamental de uma variedade Riemanniana compacta flat X . Então $\text{Aff}(X)/\text{Aff}_0(X)$ é isomorfo a $\text{Out}(G)$.*

O Teorema acima nos diz que $\text{Aff}(X)$ é finito se, e somente se, $\text{Out}(G)$ for finito e $b_1(X) = 0$. O problema da finitude de $\text{Aff}(X)$ é estudado em [20], [21].

Teorema 3.3 ([20], [33], [8]) *Sejam G um grupo de Bieberbach e V o subgrupo de translações de G . Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\text{Out}(G)$ é finito;
2. Cada submódulo simples de $M = \mathbb{Q} \otimes V$ ocorre com multiplicidade um e permanece simples quando estendemos os escalares para \mathbb{R} .

Segue de [20] que quando $(p, n, m) \neq (2, 1, 1), (3, 1, 1), (2, 1, 2)$ ou $(2, 2, 2)$, o grupo $\text{Out}(K(p^n, p^m))$ é infinito. Vamos mostrar que para estes quatro casos, o grupo $\text{Out}(K(p^n, p^m))$ é isomorfo a um subgrupo de $GL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}})$, sendo desta forma finito.

3.1 IA-Automorfismos

Para todo grupo G , sempre existe um homomorfismo natural de $\text{Aut}(G)$ em $\text{Aut}(\frac{G}{G'})$, cujo núcleo é denotado por $IA(G)$. Seus elementos são chamados *IA-automorfismos* de G . É claro que

$$I(G) \trianglelefteq IA(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G).$$

Nielsen mostrou que se F for um grupo livre de posto 2, então $IA(F) = I(F)$. Se o posto de F for maior que 2, $I(F)$ é subgrupo próprio de $IA(F)$; ver [24]. Temos também que se G for um grupo metabeliano livre de posto 2, então $IA(G) = I(G)$; ver [3]. Quanto a grupos metabelianos 2-gerados em geral, temos

Teorema 3.4 (C. Gupta [14]) *Sejam G um grupo metabeliano 2-gerado e $I_{G'}(G)$ o subgrupo de $I(G)$ induzido pelos elementos de G' . Então $\frac{IA(G)}{I_{G'}(G)}$ é comutativo. Em particular, $IA(G)$ também é metabeliano.*

Se H for subgrupo de G , vamos denotar por $I_H(G)$ o subgrupo de $I(G)$ induzido pelas conjugações por elementos de H . Além disso, vamos denotar por $\mathbb{Z}G$ o anel de grupo de G , $U(\mathbb{Z}G)$ o grupo das unidades de $\mathbb{Z}G$, por ϵ o homomorfismo de aumento, $\Delta(\mathbb{Z}G)$ o ideal de aumento de $\mathbb{Z}G$, e $U_1(\mathbb{Z}G) = \{u \in U(\mathbb{Z}G) | \epsilon(u) = 1\}$.

Agora sejam $G = K(p^n, p^m)$ e V o subgrupo de translações de G . Como o centro de G é trivial, temos que $I_V(G) \cong V$.

Proposição 3.1 *Sejam $G = K(p^n, p^m)$ e $P \cong C_{p^n} \times C_{p^m}$ o point-group de G . Então $\frac{IA(G)}{I_V(G)} \cong U_1(\mathbb{Z}P)$.*

Dem. Seja σ uma aplicação de G em G dada por $\sigma : a \mapsto ag_1, b \mapsto bg_2$, onde $g_1, g_2 \in G'$. Segue da Proposição 2.3 do Capítulo 2 que σ é um endomorfismo de G e que o subgrupo $H = \langle ag_1, bg_2 \rangle$ é isomorfo a G .

Sejam $\bar{a} = Va$ e $\bar{b} = Vb$ os geradores de P . Por abuso de notação vamos remover a notação *barra*. Agora, se $c = [a, b]$, então $g_1 = c.r_1$ e $g_2 = c.r_2$, onde $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}P$.

Como $G = HG'$, então σ será um IA-automorfismo de G se, e somente se, $H' = G'$. O subgrupo H' é um $\frac{G}{V}$ -módulo cíclico gerado por

$$c_H = [ag_1, bg_2] = [a, b] + [g_1, b] + [a, g_2] = c.(1 + r_1(b - 1) - r_2(a - 1)).$$

Então $H' = G'$ se, e somente se, $(1 + r_1(b - 1) - r_2(a - 1))$ for uma unidade no anel $\mathbb{Z}P/\mathfrak{S}$, onde \mathfrak{S} é o ideal gerado por $z = (t(p^n, a)t(p^m, b))$. Além disso, considerando uma unidade de $\mathbb{Z}P/\mathfrak{S}$ da forma $(1 + r_1(b - 1) - r_2(a - 1))$ como um elemento de $\mathbb{Z}P$, temos que ela tem aumento igual a 1.

Seja $\bar{u} = u + \mathfrak{S}$ uma unidade de $\mathbb{Z}P/\mathfrak{S}$ nas condições acima. Se $\bar{w} = w + \mathfrak{S}$ for o inverso de \bar{u} em $\mathbb{Z}P/\mathfrak{S}$, é fácil verificar que podemos escolher u e w tais que $\epsilon(u) = \epsilon(w) = 1$. Agora como para $\forall g \in P$, temos $gz = z$, então \mathfrak{S} consiste de elementos da forma $k.z$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Então $uw = 1 + k.z$, e aplicando o homomorfismo ϵ , obtemos $1 = 1 + k.|P|$. Logo $k = 0$ e $u, w \in U_1(\mathbb{Z}P)$.

Então podemos definir a aplicação $\tau : IA(G) \rightarrow U_1(\mathbb{Z}P)$, que leva o IA-automorfismo $\sigma : a \mapsto ag_1, b \mapsto bg_2$ no elemento $(1 + r_1(b - 1) - r_2(a - 1))$, onde $g_1 = c.r_1$ e $g_2 = c.r_2$.

Primeiro vamos mostrar que τ é homomorfismo. Se $\omega : a \mapsto ah_1, b \mapsto bh_2$, temos que $\tau(\omega) = (1 + s_1(b - 1) - s_2(a - 1))$, onde $h_1 = c.s_1$ e $h_2 = c.s_2$. Então

$$(a)\sigma.\omega = (ac.r_1)\omega = ac.(s_1 + r_1(1 + s_1(b - 1) - s_2(a - 1)))$$

e

$$(b)\sigma.\omega = (ac.r_2)\omega = ac.(s_2 + r_2(1 + s_1(b - 1) - s_2(a - 1))).$$

Logo

$$\begin{aligned} \tau(\sigma.\omega) &= 1 + (s_1 + r_1(1 + s_1(b - 1) - s_2(a - 1)))(b - 1) \\ &\quad - (s_2 + r_2(1 + s_1(b - 1) - s_2(a - 1)))(a - 1) \\ &= (1 + r_1(b - 1) - r_2(a - 1))(1 + s_1(b - 1) - s_2(a - 1)) \\ &= \tau(\sigma)\tau(\omega). \end{aligned}$$

Agora se $u \in U_1(\mathbb{Z}P)$, temos que $u - 1 \in \Delta(\mathbb{Z}P)$, que é gerado por $(a - 1)$ e $(b - 1)$. Então $\exists r, s \in \mathbb{Z}P$ tais que $r(b - 1) - s(a - 1) = u - 1$. Logo $u = \tau(\rho)$, onde $(a)\rho = ac.r$ e $(b)\rho = bc.s$, e τ é sobrejetiva.

Vamos mostrar que $\ker(\tau) = I_V(G)$. É claro que $I_V(G) \leq \ker(\tau)$. Devemos encontrar $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}P$, tais que

$$r_1(b - 1) - r_2(a - 1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{S}}.$$

Sejam $r_1 = \sum_{i,j} \alpha_{ij} a^i b^j$ e $r_2 = \sum_{i,j} \beta_{ij} a^i b^j$, $(i,j) \neq (p^n - 1, p^m - 1)$. Calculando $r_1(b-1) = r_2(a-1)$, modulo $t(p^n, a)t(p^m, b)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{p^n-1} \sum_{j=1}^{p^m-1} (\alpha_{i(j-1)} - \alpha_{(p^n-1)(p^m-2)} - \alpha_{ij}) a^i b^j + \\ & + \sum_{i=0}^{p^n-2} (\alpha_{i(p^m-1)} - \alpha_{(p^n-1)(p^m-2)} - \alpha_{i0}) a^i + (-\alpha_{(p^n-1)0} - \alpha_{(p^n-1)(p^m-2)}) a^{p^n-1} = \\ & = \sum_{i=1}^{p^n-1} \sum_{j=0}^{p^m-1} (\beta_{(i-1)j} - \beta_{(p^n-2)(p^m-1)} - \beta_{ij}) a^i b^j + \\ & + \sum_{j=0}^{p^m-2} (\beta_{(p^n-1)j} - \beta_{(p^n-2)(p^m-1)} - \beta_{0j}) b^j + (-\beta_{0(p^m-1)} - \beta_{(p^n-2)(p^m-1)}) b^{p^m-1}. \end{aligned}$$

Fixando i , somamos os coeficientes $a^i b^j$, para $0 \leq j \leq p^m - 1$, obtemos

$$-p^m \alpha_{(p^n-1)(p^m-2)} = -p^m \beta_{(p^n-2)(p^m-1)} + \sum_{j=0}^{p^m-1} \beta_{(i-1)j} - \sum_{j=0}^{p^m-1} \beta_{ij},$$

para $1 \leq i \leq p^n - 2$. Para $i = 0$, temos

$$-p^m \alpha_{(p^n-1)(p^m-2)} = -p^m \beta_{(p^n-2)(p^m-1)} + \sum_{j=0}^{p^m-2} \beta_{(p^n-1)j} - \sum_{j=0}^{p^m-1} \beta_{0j},$$

e para $i = p^n - 1$

$$-p^m \alpha_{(p^n-1)(p^m-2)} = -p^m \beta_{(p^n-2)(p^m-1)} + \sum_{j=0}^{p^m-1} \beta_{(p^n-2)j} - \sum_{j=0}^{p^m-2} \beta_{(p^n-1)j}.$$

Somando as p^n equações acima, obtemos

$$\alpha_{(p^n-1)(p^m-2)} = \beta_{(p^n-2)(p^m-1)}$$

e então

$$\sum_{j=0}^{p^m-1} \beta_{ij} = \sum_{j=0}^{p^m-2} \beta_{(p^n-1)j}$$

para $0 \leq i \leq p^n - 2$. Da mesma forma vamos ter

$$\sum_{i=0}^{p^n-1} \alpha_{ij} = \sum_{i=0}^{p^n-2} \alpha_{i(p^m-1)}$$

para $0 \leq j \leq p^m - 2$. Vamos denotar

$$\gamma = \sum_{i=0}^{p^n-2} \alpha_{i(p^m-1)}$$

e

$$\delta = \sum_{j=0}^{p^m-2} \beta_{(p^n-1)j}.$$

Podemos reescrever r_1 da seguinte forma : agrupamos todos os termos $a^i b^j$ com $i \neq 0$, e escrevemos

$$r_1 = \gamma_1 t(p^m, b) + f_b + r'_1(a - 1),$$

onde $\gamma_1 \in \mathbb{Z}$, $f_b \in \mathbb{Z}\langle b \rangle$ e $r'_1 \in \mathbb{Z}H$. Analogamente

$$r_2 = \delta_2 t(p^n, a) + f_a + r'_2(b - 1).$$

Desta forma vamos obter

$$r_1 = \left(\sum_{i=0}^{p^n-2} \alpha_{i(p^m-1)} \right) t(p^m, b) + \sum_{j=0}^{p^m-2} \left(\sum_{i=0}^{p^n-1} \alpha_{ij} - \sum_{i=0}^{p^n-2} \alpha_{i(p^m-1)} \right) b^j + r'_1(a - 1).$$

Mas com as equações obtidas anteriormente vamos ter

$$r_1 = \gamma t(p^m, b) + r'_1(a - 1).$$

Fazendo o mesmo para r_2 , teremos

$$r_2 = \left(\sum_{j=0}^{p^m-2} \beta_{(p^n-1)j} \right) t(p^n, a) + \sum_{i=0}^{p^n-2} \left(\sum_{j=0}^{p^m-1} \beta_{ij} - \sum_{j=0}^{p^m-2} \beta_{(p^n-1)j} \right) a^i + r'_2(b - 1)$$

e então

$$r_2 = \delta t(p^n, a) + r'_2(b - 1).$$

Então a equação $r_1(b - 1) = r_2(a - 1)$ vai nos dar

$$r'_1(a - 1)(b - 1) = r'_2(a - 1)(b - 1).$$

Agora quando encontramos as expressões para r'_1 e r'_2 , vamos ter

$$\begin{aligned} r'_1 &= r''_1 + \alpha_{(p^n-1)(p^m-2)} a^{p^n-2} b^{p^m-2} \\ r'_2 &= r''_2 + \beta_{(p^n-2)(p^m-1)} a^{p^n-2} b^{p^m-2}. \end{aligned}$$

Como já vimos que $\alpha_{(p^n-1)(p^m-2)} = \beta_{(p^n-2)(p^m-1)}$, devemos ter

$$r''_1(a - 1)(b - 1) = r''_2(a - 1)(b - 1),$$

que não poderá ser mais reduzida módulo $t(p^n, a)t(p^m, b)$. Quando desenvolvermos a expressão acima teremos

$$r''_1 = r''_2,$$

e desta forma $r'_1 = r'_2$. Vamos denotar este elemento por s . Então temos

$$r_1 = \gamma t(p^m, b) + s(a - 1) \quad e \quad r_2 = \delta t(p^n, a) + s(b - 1),$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} g_1 &= c.(\gamma t(p^m, b) + s(a - 1)) = [a, (b^{p^m})^\gamma g'] \\ g_2 &= c.(\delta t(p^n, a) + s(b - 1)) = [b, (a^{p^n})^{-\delta} g'], \end{aligned}$$

onde $g' = c^{-s}$. Seja $v = (a^{p^n})^{-\delta} (b^{p^m})^\gamma g'$. Então

$$\begin{aligned} a^v &= a[a, v] = ag_1 \\ b^v &= b[b, v] = bg_2. \end{aligned}$$

e segue que $\ker(\tau) = I_V(G)$. ■

Para descrevermos a estrutura de $U_1(\mathbb{Z}(C_{p^n} \times C_{p^m}))$, temos

Teorema 3.5 (G. Higman [17]) *Seja P um grupo abeliano finito de ordem n . Então*

$$U(\mathbb{Z}P) = \pm P \times F,$$

onde F é um grupo abeliano livre de posto $\frac{1}{2}(n + 1 + n_2 - 2\ell)$, sendo n_2 o número de subgrupos de ordem 2 de P e ℓ o número de subgrupos cíclicos de P .

Lema 3.6 *Seja $P \cong C_{p^n} \times C_{p^m}$, onde $m \geq n$. Então F tem posto*

$$(2^{m-1} + n - m - 3)2^n + 4$$

se $p = 2$, e

$$\frac{1}{2} \left(p^{n+m} + 2(n - m)p^n - 2(p + 1)\frac{p^n - 1}{p - 1} - 1 \right)$$

se p for ímpar. Em particular, F tem posto nulo se, e somente se, $(p, n, m) = (2, 1, 1), (3, 1, 1), (2, 1, 2)$ ou $(2, 2, 2)$.

Dem. Se utilizarmos indução sobre $(m + n)$, podemos mostrar que $C_{p^n} \times C_{p^m}$ possui

$$(m - n)p^n + (p + 1)\frac{p^n - 1}{p - 1} + 1$$

subgrupos cíclicos (incluindo o subgrupo trivial). Além disso, $n_2 = 3$ quando $p = 2$, e $n_2 = 0$ quando p for ímpar. Logo, quando $p = 2$, F tem posto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2^{n+m} + 4 - 2((m-n)2^n + 3(2^n - 1) + 1)) &= 2^{n+m-1} + 2 - (m-n)2^n - 3(2^n) + 2 \\ &= (2^{m-1} + n - m - 3)2^n + 4. \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos obter a expressão do posto de F quando p for ímpar. Agora é simples verificar os casos nos quais o posto de F é nulo. ■

O Teorema 3.5 nos diz que $U_1(\mathbb{Z}P) = P \times F$. Os elementos de P são chamados unidades triviais. Se trabalharmos com a unidade trivial $a^i b^j$, então a igualdade

$$1 + r_1(b-1) - r_2(a-1) = a^i b^j$$

é satisfeita quando

$$r_1 = \frac{(b^j - 1)}{(b - 1)} = 1 + b + \dots b^{j-1}$$

e

$$r_2 = -b^j \frac{(a^i - 1)}{(a - 1)} = -b^j(1 + a + \dots + a^{i-1}),$$

que equivalem ao automorfismo interno induzido por $a^i b^j$.

Corolário 3.7 *Seja $G = K(p^n, p^m)$. Então $\frac{IA(G)}{I(G)}$ é isomorfo ao grupo abeliano livre F descrito no Lema 3.6.*

3.2 Automorfismos Externos

Vimos que $IA(G)$ denota o núcleo do homomorfismo natural de $Aut(G)$ em $Aut(\frac{G}{G'})$. Sejam $G = K(p^n, p^m)$ e Q a imagem deste homomorfismo. Então o grupo de automorfismos externos $Out(G)$ é a extensão do grupo abeliano livre F por um grupo isomorfo a Q . Temos que $\frac{G}{G'} \cong C_{p^{n+m}} \times C_{p^{n+m}}$, e assim o grupo $Aut(\frac{G}{G'}) \cong GL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}})$ é gerado pelo conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U(\mathbb{Z}_{p^{n+m}}) \end{pmatrix} \right\}.$$

Temos que $U(\mathbb{Z}_{p^{n+m}}) \cong C_p \times C_{p^{n+m-2}}$ quando $p = 2$ e $n + m \geq 3$, e é cíclico nos demais casos. O homomorfismo natural de $\mathbb{Z}_{p^{n+m}}$ sobre \mathbb{Z}_p induz um epimorfismo de

$GL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}})$ sobre $GL(2, \mathbb{Z}_p)$, cujo núcleo N é gerado por

$$\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

Então o grupo N é abeliano e isomorfo a $(C_{p^{n+m-1}})^4$, e $GL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}})$ tem ordem $p^{4(n+m)-3}(p^2-1)(p-1)$.

Os elementos de Q são induzidos pelos elementos de $Aut(G)$ modulo $IA(G)$. É fácil verificar que existem $g_1, g_2 \in G'$, tais que a aplicação definida como

$$\begin{aligned} \gamma : \quad a &\mapsto ag_1 \\ b &\mapsto b^d g_2 \end{aligned}$$

é automorfismo de G se, e somente se, $d = \pm 1$. Então Q é de fato isomorfo a um subgrupo de

$$SL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}}) \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $n = m$, pode-se mostrar facilmente que

$$((ab)^{p^n})^{t(p^n, a)} = ((ab)^{p^n})^{t(p^n, b)} = e,$$

e assim

$$\begin{array}{ccc} \sigma : & a \mapsto ab & \omega : & a \mapsto a \\ & b \mapsto b & & b \mapsto ab \end{array} \quad \text{e}$$

são automorfismos de G . Neste caso, teremos

$$Q \cong SL(2, \mathbb{Z}_{p^{2n}}) \rtimes C_2$$

e $|Q| = 2p^{6n-2}(p^2-1)$.

Teorema 3.8 *Se $(p, n, m) = (2, 1, 1), (3, 1, 1), (2, 1, 2)$ ou $(2, 2, 2)$, então $Out(K(p^n, p^m))$ é isomorfo a um subgrupo de $GL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}})$.*

Dem. Segue do Lema 3.6 que o posto de F é nulo para estes grupos. Logo $IA(G) = I(G)$, e $Out(G)$ é isomorfo a $Q \leq GL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}})$.

O grupo $Out(K(2, 2)) \cong SL(2, \mathbb{Z}_4) \rtimes C_2 \cong GL(2, \mathbb{Z}_4)$, de ordem 96, é isomorfo ao grupo de afinidades da variedade de Hantzsche-Wendt; ver [16], [10] cap. V. Os grupos $Out(K(3, 3)) \cong SL(2, \mathbb{Z}_9) \rtimes C_2$ e $Out(K(4, 4)) \cong SL(2, \mathbb{Z}_{16}) \rtimes C_2$ possuem ordem 6^4 e $3 \cdot 2^{11}$, respectivamente.

Para $K(2, 4)$, como $(ab)^2 \notin V$, temos que não existem $g_1, g_2 \in G'$ tais que $\gamma : a \mapsto abg_1, b \mapsto bg_2$ seja automorfismo de $K(2, 4)$. Além disso, podemos mostrar facilmente que $\delta : a \mapsto ab^2, b \mapsto b$ é automorfismo de $K(2, 4)$. Logo $Out(K(2, 4))$ é isomorfo a um subgrupo próprio de $SL(2, \mathbb{Z}_8) \rtimes C_2$, contendo o subgrupo L de $SL(2, \mathbb{Z}_8) \rtimes C_2$ gerado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se mostrar que L possui índice 3 em $SL(2, \mathbb{Z}_8) \rtimes C_2$, sendo desta forma maximal. Então concluímos que $Out(K(2, 4)) \cong L$, de ordem 2^8 . ■

Para os demais casos, $Out(K(p^n, p^m))$ será extensão de um grupo abeliano livre F de posto finito por um grupo finito Q , isomorfo a um subgrupo de $SL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}}) \rtimes C_2$. Cabe notar que o problema para descrever explicitamente $Out(K(p^n, p^m))$ nestes casos se deve à dificuldade de encontrar os geradores de F ; ver [27]. Mas de qualquer forma, se F for abeliano maximal, então $Out(K(p^n, p^m))$ será um grupo cristalográfico. Devemos então verificar se a ação de Q sobre F é fiel.

Vimos que se P for um grupo abeliano finito, o grupo das unidades $U(\mathbb{Z}P)$ é isomorfo a $\pm P \times F$, onde F é um grupo abeliano livre de posto finito. Além disso, para todo $x \in P$, as unidades da forma $\pm x$ são chamadas unidades triviais de $\mathbb{Z}P$. Abaixo vamos descrever como construir unidades não triviais; ver [26], [27].

Seja C_n o grupo cíclico de ordem $n > 3$. Para cada divisor d de n , fixamos um elemento x_d de ordem d em C_n . Se φ denotar a função de Euler, então um elemento de $\mathbb{Z}C_n$ da forma

$$b_{i,d} = (1 + x_d + \dots + x_d^{i-1})^{\varphi(n)} + \frac{1 - i^{\varphi(n)}}{d} \hat{x}_d,$$

onde $(i, d) = 1$, $i > 1$ e $\hat{x}_d = 1 + x_d + \dots + x_d^{d-1}$, é uma unidade de $\mathbb{Z}C_n$, chamada *unidade cíclica de Bass*.

Apesar de em geral não ser possível explicitar os geradores para F , quando P for abeliano, as unidades cíclicas de Bass podem nos dar informações sobre a ação de Q sobre F .

Teorema 3.9 (Bass [27]) *As unidades cíclicas de Bass $\{b_{i,d} \mid 1 < i < d/2, (i, d) = 1, d/n\}$ geram um subgrupo livre de torção de índice finito em $U(\mathbb{Z}C_n)$.*

Teorema 3.10 (Bass, Milnor [27]) *Sejam P um grupo abeliano finito e $U(\mathbb{Z}P)$ o grupo das unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}P$. Então o subgrupo*

$$\langle U(\mathbb{Z}C_k) \mid C_k \leq P, C_k \text{ cíclico} \rangle$$

possui índice finito em $U(\mathbb{Z}P)$.

O Teorema acima de fato nos diz que as unidades cíclicas de Bass de $U(\mathbb{Z}P)$ geram um subgrupo livre de torção de índice finito em $U(\mathbb{Z}P)$. Então devemos verificar a ação de Q sobre as unidades cíclicas de Bass de $U(\mathbb{Z}P)$.

Seja agora um IA-automorfismo σ_u , dado por

$$\begin{aligned} \sigma_u : \quad a &\mapsto ac.r_1 \\ b &\mapsto bc.r_2, \end{aligned}$$

onde $c.r_1, c.r_2 \in G'$. Temos que σ_u dá origem a um elemento de $U_1(\mathbb{Z}P)$, dado por $u = (1 + r_1(b - 1) - r_2(a - 1))$. Sejam α e β dois automorfismos de G dados por

$$\begin{array}{ccc} \alpha : & a \mapsto a & \\ & b \mapsto ab & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \beta : & a \mapsto a & \\ & b \mapsto b^{-1} & \end{array}$$

Ambos os automorfismos acima induzem de forma natural homomorfismos em $U(\mathbb{Z}P)$, que também vamos denotar por α e β . A ação de α sobre σ_u , por conjugação, é da forma

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\sigma_u\alpha : \quad a &\mapsto a \mapsto ac^{r_1} \mapsto a\alpha(c)^{\alpha(r_1)} \\ b &\mapsto a^{-1}b \mapsto c^{-r_1}a^{-1}bc^{r_2} \mapsto \alpha(c)^{\alpha(-r_1)}b\alpha(c)^{\alpha(r_2)}. \end{aligned}$$

Agora $\alpha(c) = c$ e vamos ter $(a)\alpha^{-1}\sigma_u\alpha = ac^{\alpha(r_1)}$ e $(b)\alpha^{-1}\sigma_u\alpha = bc^{\alpha(r_2)-b\alpha(r_1)}$. A unidade de $U(\mathbb{Z}P)$ obtida será

$$\begin{aligned} 1 + \alpha(r_1)(b - 1) - (\alpha(r_2) - b\alpha(r_1))(a - 1) &= 1 + \alpha(r_1)(ab - 1) - \alpha(r_2)(a - 1) \\ &= \alpha(u). \end{aligned}$$

Então $\alpha^{-1}\sigma_u\alpha = \sigma_{\alpha(u)}$. Da mesma forma podemos mostrar que $\beta^{-1}\sigma_u\beta = \sigma_{\beta(u)}$. Desta forma a ação de Q sobre F é dada pela ação induzida pelos automorfismos que compõem a contra-imagem de Q , sobre o subgrupo de $U(\mathbb{Z}P)$ correspondente a F .

Vimos no início deste Capítulo que $Out(G)$ possui um subgrupo finito, isomorfo a $C(V)/I_V(G)$, onde $C(V)$ é o centralizador de V em $Aut(G)$. Além disso, $C(V)/I_V(G)$

é isomorfo a $H^1(P, V)$, o primeiro grupo de cohomologia. Agora, como F é livre de torção, então Q possui um subgrupo abeliano N isomorfo a $H^1(P, V)$, e se considerarmos a ação de Q sobre F como descrita acima, podemos facilmente verificar que N age trivialmente em F , enquanto Q/N age fielmente em FN/N . Então :

Teorema 3.11 *Seja $G = K(p^n, p^m)$, com $(p, n, m) \neq (2, 1, 1), (3, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 2)$. Então $Out(G)$ satisfaz a sequência exata curta*

$$0 \rightarrow N \rightarrow Out(G) \rightarrow R \rightarrow 1,$$

onde N é isomorfo a um subgrupo abeliano de $SL(2, \mathbb{Z}_{p^{n+m}}) \rtimes C_2$ e R é um grupo cristalográfico com point-group isomorfo a Q/N .

Em particular, quando $m = n$ vimos que $Q \cong SL(2, \mathbb{Z}_{p^{2n}}) \rtimes C_2$. Temos também que existe um epimorfismo natural de Q em $SL(2, \mathbb{Z}_{p^n}) \rtimes C_2$, cujo núcleo K é gerado por

$$\begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1-p^n \end{pmatrix}.$$

O grupo K é isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^n} \times C_{p^n}$. Podemos notar que todo elemento de K age trivialmente em F e que os automorfismos que induzem os elementos de K também agem trivialmente em V . Logo $K = N$ e $Q/N \cong SL(2, \mathbb{Z}_{p^n}) \rtimes C_2$.

Então, quando $(p, n) \neq (2, 1), (3, 1), (2, 2)$, existe a seguinte cadeia de subgrupos normais para $Aut(K(p^n, p^n))$:

$$\{1\} = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq N_2 \trianglelefteq N_3 \trianglelefteq N_4 = Aut(K(p^n, p^n)),$$

onde $N_1 = I(K(p^n, p^n)) \cong K(p^n, p^n)$, $N_2/N_1 \cong H^1(P, V) \cong C_{p^n} \times C_{p^n} \times C_{p^n}$, $N_3/N_2 \cong F$, grupo abeliano livre de posto finito, e $N_4/N_3 \cong SL(2, \mathbb{Z}_{p^n}) \rtimes C_2$. Além disso, N_4/N_2 é grupo cristalográfico com point-group isomorfo a $SL(2, \mathbb{Z}_{p^n}) \rtimes C_2$.

Capítulo 4

Quocientes de $K(p^n, p^m)$

Mostramos na Proposição 2.1 do Capítulo 2 que todo grupo de Bieberbach com quociente derivado finito e *point-group* isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$ possui um subgrupo isomorfo a um quociente livre de torção de $K(p^n, p^m)$. Se denotarmos por $\Lambda_{p,n,m}$ o conjunto de representantes de classes de isomorfismo de quocientes livres de torção de $K(p^n, p^m)$, podemos tornar $\Lambda_{p,n,m}$ um conjunto parcialmente ordenado se considerarmos para $\forall Q_1, Q_2 \in \Lambda_{p,n,m}$,

$$Q_1 \geq Q_2 \iff \exists N \trianglelefteq Q_1 \quad \text{t.q.} \quad \frac{Q_1}{N} \cong Q_2.$$

Neste Capítulo vamos calcular $\Lambda_{p,n,m}$, para alguns valores de p, n, m . Considere então

$$K(p^n, p^m) = \langle a, b \mid (a^{p^n})^{t(p^m, b)}, (b^{p^m})^{t(p^n, a)}, [[a, b], a^{p^n}], [[a, b], b^{p^m}], \text{ metabeliano} \rangle.$$

Recordamos que $K(p^n, p^m)$ é um grupo de Bieberbach de dimensão $p^{n+m} - 1$, com *point-group* isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$ e quociente derivado isomorfo a $C_{p^{n+m}} \times C_{p^{n+m}}$. O subgrupo derivado G' de $G = K(p^n, p^m)$ é abeliano livre de posto $p^{n+m} - 1$, e se denotarmos o comutador $[a, b]$ por c , e a ação de a e b em G' por A e B , respectivamente, segue que G' é gerado livremente pelo conjunto

$$\{c.A^i.B^j, 0 \leq i < p^n, 0 \leq j < p^m, (i, j) \neq (p^n - 1, p^m - 1)\}.$$

Além disso o subgrupo $V = \langle a^{p^n}, b^{p^m}, G' \rangle$ é o subgrupo de translações de G .

Lema 4.1 *Seja M o $\mathbb{Q}[\frac{G}{V}]$ -módulo definido como $M = \mathbb{Q} \otimes V$. Então M se decompõe em soma direta de*

$$(m-n)p^n + (p+1)\frac{p^n-1}{p-1}$$

submódulos irredutíveis e não equivalentes.

Dem. Como $\mathbb{Q}[\frac{G}{V}]$ -módulo, M é cíclico gerado por c . Utilizando o fato que para $s \geq 1$, os polinômios $d(x)$ e $t(p^s, x)$ são primos entre si, podemos obter decomposição para M da forma

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4,$$

onde

$$\begin{aligned} M_1 &= M.d(A)d(B), & M_2 &= M.t(p^n, A)d(B) \\ M_3 &= M.d(A)t(p^n, B), & M_4 &= M.t(p^n, A)t(p^n, B). \end{aligned}$$

Além disso temos que $M.t(p^n, A)d(A) = M.t(p^n, B)d(B) = 0$. Logo o submódulo M_4 é central em G , sendo desta forma trivial. Se $s \geq 2$, o polinômio $t(p^s, x)$ pode ser fatorado como $t(p^{s-i}, x)t(p^i, x^{p^{s-i}})$, para $1 \leq i \leq s-1$. Então temos

$$t(p^s, x) = t(p, x)t(p, x^p)t(p, x^{p^2}) \dots t(p, x^{p^{s-1}}),$$

onde os termos são todos irredutíveis sobre \mathbb{Q} . Vamos denotar por U_j a matriz companheira do polinômio $t(p, x^{p^{j-1}})$ e Id a matriz identidade. Como M é cíclico gerado por c , podemos então encontrar base para M_2 tal que $[A] = Id$ e

$$B = \begin{pmatrix} U_1 & & & \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_m \end{pmatrix}.$$

Do mesmo modo, existe base para M_3 tal que $[B] = Id$ e

$$A = \begin{pmatrix} U_1 & & & \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_n \end{pmatrix}.$$

Então temos que M_2 e M_3 se decompõem da forma

$$M_2 = \bigoplus_{j=1}^m M_{2j} \text{ e } M_3 = \bigoplus_{j=1}^n M_{3j},$$

onde os submódulos M_{2j} e M_{3j} possuem dimensão $p^{j-1}(p-1)$. A ação de a e b nestes submódulos é descrita pelas matrizes acima.

Temos ainda que encontrar a decomposição para M_1 . Em M_1 , A e B possuem como polinômios minimais $t(p^n, x)$ e $t(p^m, x)$, respectivamente. Se fizermos a extensão do corpo \mathbb{Q} por B , temos

$$\mathbb{Q}[B] \cong \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Q}[U_j].$$

Se estendermos o anel $\mathbb{Q}[B]$ por A , teremos

$$\mathbb{Q}[B][A] \cong \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Q}[U_j][A] \cong \bigoplus_{j=1}^m \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q}[U_j^B][U_i^A].$$

Agora é simples verificar que estes submódulos se decompõem em soma direta de submódulos irredutíveis. A forma em que foram construídos nos leva a conclusão que são todos não equivalentes.

Segue da Proposição 2.6 de [26], que descreve a estrutura da álgebra $\mathbb{Q}[\frac{G}{V}]$, que o número de submódulos irredutíveis de M é igual ao número de subgrupos cíclicos não triviais de $C_{p^n} \times C_{p^m}$. O resultado segue então da demonstração do Lema 3.6 do Capítulo 3. ■

Note que temos $(b^{p^m})^{d(b)} = [(b^{p^m}), b] = e = [(a^{p^n}), a] = (a^{p^n})^{d(a)}$. Agora, como $\ker(d(B)) = M_3$ e $\ker(d(A)) = M_2$, temos

$$b^{p^m} \in M_3 \text{ e } a^{p^n} \in M_2.$$

Lema 4.2 *Sejam G um grupo de Bieberbach, com subgrupo de translações V , e N_1 , N_2 dois subgrupos normais de G , tais que G/N_1 e G/N_2 são ambos livres de torção. Se $\mathbb{Q} \otimes (N_1 \cap V) \subseteq \mathbb{Q} \otimes (N_2 \cap V)$, então $N_1 \leq N_2$.*

Dem. Vamos denotar por R_i o módulo $\mathbb{Q} \otimes (N_i \cap V)$. Como $(N_1 \cap V)$ e $(N_2 \cap V)$ são submódulos puros de V , temos que

$$(N_1 \cap V) = R_1 \cap V \subseteq R_2 \cap V = (N_2 \cap V).$$

Seja $n = [G : V]$. Se $x_1 \in N_1$, então $x_1^n \in N_1 \cap V \subseteq N_2 \cap V$. Mas como G/N_2 é livre de torção e $x_1^n \in N_2$, devemos ter $x_1 \in N_2$ e $N_1 \leq N_2$. ■

Vamos então descrever o método que vamos utilizar para calcular os quocientes livres de torção de $K(p^n, p^m)$. Seja N um subgrupo normal não trivial de $K(p^n, p^m)$. Temos que $\{e\} \neq N \cap V \trianglelefteq K(p^n, p^m)$ e desta forma $R = \mathbb{Q} \otimes (N \cap V)$ é submódulo não trivial de M . Agora pelo Lema 4.1, temos que M se decompõe em soma direta de $\left((m-n)p^n + (p+1)\frac{p^n-1}{p-1}\right) = k$ submódulos irreduzíveis e não equivalentes. Então segue do Teorema de Krull-Schmidt que R será igual à soma de alguns destes submódulos. Teremos $2^k - 1$ casos a estudar (excluimos o caso trivial).

Suponha então que para um possível caso para R , encontramos $N \trianglelefteq K(p^n, p^m)$ e $x \in K(p^n, p^m)$, tais que $R = \mathbb{Q} \otimes (N \cap V)$ e $x \notin N$, mas com $x^s \in N$. Então $K(p^n, p^m)/N$ não é livre de torção, mas podemos definir \overline{N} como o fêcho normal em $K(p^n, p^m)$ de $\langle N, x \rangle$ e repetir a análise com o subgrupo \overline{N} . É claro que podemos ter $\overline{R} = \mathbb{Q} \otimes (\overline{N} \cap V)$ diferente de R . Além disso, se x for um gerador de $K(p^n, p^m)$, então o quociente $K(p^n, p^m)/\overline{N}$ será cíclico finito. Por exemplo, vimos que $a^{p^n} \in M_2$ e $b^{p^m} \in M_3$. Então se M_2 ou M_3 estiverem contidos em R , teremos uma potência de a ou b contida em N , o que não será possível. Vamos então procurar por potências dos geradores para que possamos eliminar algumas possibilidades para R . Além disso, segue do Lema anterior que para cada caso de R analisado, existe no máximo um $N \trianglelefteq K(p^n, p^m)$ com $\mathbb{Q} \otimes (N \cap V) = R$ e $K(p^n, p^m)/N$ livre de torção.

Utilizando o método descrito acima, vamos calcular nas próximas seções a lista de quocientes livres de torção dos grupos $K(p, p^2)$, $K(2, 8)$ e $K(4, 4)$. Para o grupo $K(p, p^m)$, vamos obter informações sobre os quocientes derivados de seus quocientes livres de torção. Através deste estudo, obtemos algumas propriedades gerais de grupos metabelianos, livres de torção, com quociente derivado finito. O problema para estendermos os cálculos para o caso geral se encontra no crescimento exponencial das possibilidades para o submódulo $R = \mathbb{Q} \otimes (N \cap V)$.

4.1 Quocientes derivados de elementos de $\Lambda_{p,1,m}$

Vamos estudar os quocientes livres de torção de $K(p, p^m)$. Neste caso não vamos explicitar todos os quocientes, mas apenas obter informações sobre os quocientes derivados de elementos de $\Lambda_{p,1,m}$.

Se V é o subgrupo de translações de $K(p, p^m)$ e U_j denota a matriz companheira do polinômio $t(p, x^{p^{j-1}})$, vimos que $M = \mathbb{Q} \otimes V$ se decompõe em soma direta de $mp+1$

submódulos irredutíveis, não equivalentes da forma

$$M = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \bigoplus_{j=1}^m M_{1j_i} \bigoplus_{j=1}^m M_{2j} \bigoplus M_3,$$

onde M_{1j_i} tem dimensão igual $p^{j-1}(p-1)$, com $[A] = U_j^{ip^{j-1}}$ e $[B] = U_j$. M_{2j} tem dimensão $p^{j-1}(p-1)$, com $[A] = Id$ e $[B] = U_j$, e M_3 tem dimensão $p-1$, onde $[A] = U_1$ e $[B] = Id$.

Lema 4.3 *Seguindo a notação acima, temos que*

$$(ab^k)^{p^m} \in M_{11_i},$$

para $1 \leq i \leq p-1$ e $k+i = p^m$, e

$$(ab^{kp^{j-1}})^{p^m} \in M_{21} \oplus \dots \oplus M_{2(j-1)} \oplus M_{1j_i},$$

para $1 \leq i \leq p-1$, $2 \leq j \leq m$ e $k+i = p^{m-j+1}$.

Dem. Vamos mostrar que $((ab^k)^{p^m})^{(a-b^r)} = e$ se $k+r = p^m$. Como ambos os elementos $(ab^k)^{p^m}$ e b^{p^m} estão contidos em V , eles devem comutar. Logo $(ab^k)^{p^m}$ comuta com $b^{p^m}(ab^k)^{-1} = b^{p^m-k}a^{-1} = b^ra^{-1}$, e temos

$$((ab^k)^{p^m})^{(1-b^ra^{-1})} = e.$$

Podemos conjugar a expressão acima por a , e obtemos

$$((ab^k)^{p^m})^{(a-b^r)} = e$$

se $k+r = p^m$.

Agora seja $r = ip^{j-1}$, onde $1 \leq i \leq p-1$. Pela decomposição que obtivemos para M , temos que

$$\ker(A - B^{ip^{j-1}}) = M_{21} \oplus \dots \oplus M_{2(j-1)} \oplus M_{1j_i}$$

quando $2 \leq j \leq m$, e

$$\ker(A - B^i) = M_{11_i}$$

quando $j = 1$. De fato, A age como $B^{ip^{j-1}}$ em M_{1j_i} e como Id em M_{2s} , $1 \leq s \leq m$. Por sua vez B age como a matriz companheira de $t(p, x^{p^{s-1}})$ em M_{2s} . Logo, para $1 \leq s \leq j-1$, $B^{ip^{j-1}}$ também vai agir como Id .

Então temos

$$(ab^k)^{p^m} \in \ker(A - B^i) = M_{11_i}$$

para $1 \leq i \leq p-1$ e $k+i = p^m$, e

$$(ab^{kp^{j-1}})^{p^m} \in \ker(A - B^{ip^{j-1}}) = M_{21} \oplus \dots \oplus M_{2(j-1)} \oplus M_{1j_i}$$

para $1 \leq i \leq p-1$, $2 \leq j \leq m$ e $k+i = p^{m-j+1}$. ■

Em [15], Gupta e Sidki investigam a existência de grupos metabelianos livres de torção com quociente derivado abeliano elementar finito. Primeiramente eles mostram que $K(p, p)$ não possui quocientes próprios livres de torção. Além disso, provam o seguinte Teorema.

Teorema 4.4 [15] *Seja G um grupo metabeliano com $\frac{G}{G'}$ um p -grupo finito, p primo. Se H é subgrupo de G tal que $G = G'H$, então $H' = H \cap G'$.*

Utilizando o Teorema acima e o fato que $K(p, p)$ não possui quocientes próprios livres de torção, eles mostram que um grupo metabeliano finitamente gerado, livre de torção, não pode ter quociente derivado isomorfo a $C_p \times C_p$. Além disso, eles apresentam uma família de grupos metabelianos $G(p, k)$, com quociente derivado abeliano elementar de posto k . $G(p, k)$ é livre de torção se, e somente se, $k = 3$ e p for ímpar, ou $k \geq 4$, p primo qualquer. O problema da existência de grupo metabeliano finitamente gerado, livre de torção com quociente derivado isomorfo a $C_2 \times C_2 \times C_2$ continua ainda em aberto.

Se trabalharmos com quocientes de $K(p, p^m)$, podemos investigar as possibilidades para grupos metabelianos finitamente gerados, livres de torção, tendo como quociente derivado um p -grupo finito 2-gerado.

Proposição 4.1 *Para quaisquer $2 \leq i, j \leq m+1$, o grupo $K(p, p^m)$ possui um quociente livre de torção com quociente derivado isomorfo a $C_{p^i} \times C_{p^j}$.*

Dem. A demonstração será por indução sobre m . Se $m = 1$, então temos $i = j = 2$ e a Proposição é válida, já que $K(p, p)$ possui quociente derivado isomorfo a $C_{p^2} \times C_{p^2}$.

Seja então $m \geq 2$. Como $K(p, p^m)$ possui quociente livre de torção isomorfo a $K(p, p^{m-1})$, temos por indução que $K(p, p^m)$ possui quociente livre de torção com

quociente derivado isomorfo a $C_{p^i} \times C_{p^j}$, para quaisquer $2 \leq i, j \leq m$. Como o quociente derivado de $K(p, p^m)$ é isomorfo a $C_{p^{m+1}} \times C_{p^{m+1}}$, precisamos apenas encontrar $N_k \trianglelefteq K(p, p^m)$, tal que $K(p, p^m)/N_k$ seja livre de torção e tenha quociente derivado $C_{p^k} \times C_{p^{m+1}}$, para $2 \leq k \leq m$.

Para $2 \leq k \leq m$, seja N_k o fêcho normal em $K(p, p^m)$ do subgrupo gerado por $(a^p)^{t(p^{k-1}, b^{p^{m+1-k}})}$. É claro que N_k está contido no subgrupo de translações V de $K(p, p^m)$, e que $K(p, p^m)/N_k$ possui quociente derivado $C_{p^k} \times C_{p^{m+1}}$. Temos então que mostrar que $K(p, p^m)/N_k$ é livre de torção.

Vimos que $a^p \in M_2$ e que B age como a matriz companheira de $t(p, x^{p^{j-1}})$ em M_{2j} . Como $t(p^{k-1}, b^{p^{m+1-k}})$ se fatora da forma

$$t(p^{k-1}, b^{p^{m+1-k}}) = t(p, b^{p^{m+1-k}}) \dots t(p, b^{p^{m-2}}) t(p, b^{p^{m-1}}),$$

temos que

$$\ker(t(p^{k-1}, B^{p^{m+1-k}})) = M_{2(m+2-k)} \oplus \dots \oplus M_{2m},$$

e o elemento $(a^p)^{t(p^{k-1}, b^{p^{m+1-k}})}$ está contido em $M_{21} \oplus M_{22} \oplus \dots \oplus M_{2(m+1-k)}$, possuindo componentes não nulas em cada um destes submódulos. Logo

$$\mathbb{Q} \otimes N_k = M_{21} \oplus M_{22} \oplus \dots \oplus M_{2(m+1-k)}$$

e N_k possui posto $\sum_{i=0}^{m-k} p^i(p-1) = p^{m+1-k} - 1$.

Considere então

$$\begin{aligned} (a^p)^{t(p^{k-1}, b^{p^{m+1-k}})} &= a^p (a^p)^{b^{p^{m+1-k}}} \dots (a^p)^{(b^{p^{m+1-k}})^{p^{k-1}-1}} \\ &= p^{k-1} a^p + c \cdot t(p, A) t(p^{m+1-k}, B) l(p^{k-1}, B^{p^{m+1-k}}) \\ &= p^{k-1} a^p + c \cdot (1 + \dots + A^{p-1}) (1 + \dots + B^{p^{m+1-k}-1}) ((p^{k-1} - 1) + \\ &\quad + \dots + (B^{p^{m+1-k}})^{p^{k-1}-2}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(a^p)^{t(p^{k-1}, b^{p^{m+1-k}})^{b^i}}, 0 \leq i \leq p^{m+1-k} - 2\}$ constitui uma base para N_k . Então os elementos de N_k podem ser escritos como $(a^p)^{t(p^{k-1}, b^{p^{m+1-k}})f(b)}$, onde $f(b) \in \mathbb{Z}[b]$, de grau no máximo $p^{m+1-k} - 2$. Se construirmos a matriz dos geradores de V/N_k na forma Normal de Smith, é simples de verificarmos que V/N_k é livre de torção. De fato, vamos exemplificar a análise com o grupo $K(2, 8)$ e com N_2 o fêcho normal em $K(2, 8)$ do subgrupo gerado por $(a^2)^{1+b^4}$.

O subgrupo N_2 é abeliano, de posto 3, tendo como geradores livres os elementos

$$(a^2)^{1+b^4}, (a^2)^{b+b^5}, (a^2)^{b^2+b^6}.$$

Se escrevermos os elementos acima em função da base de V , e construirmos a matriz dos geradores de V/N_2 , teremos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a última posição não nula da última linha é preenchida por 1 e pertence a uma coluna em que todas as outras entradas são nulas. Desta forma podemos efetuar operações elementares com suas colunas e zerar todas as outras entradas desta linha, sem que haja nenhuma modificação com as outras linhas. Mas agora a penúltima linha também terá esta característica. Logo podemos repetir este processo com todas as linhas e vamos obter uma nova matriz, equivalente à matriz acima, da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo V/N_2 é livre de torção. O caso geral será semelhante. A última linha da matriz de geradores de V/N_k apresentará as mesmas características do caso acima, e podemos fazer as operações necessárias com suas colunas para obter o resultado.

Então para provarmos que $K(p, p^m)/N_k$ é livre de torção, basta mostrarmos que não existe $g \in K(p, p^m) \setminus V$, tal que $g^{p^m} \in N_k$.

Recordamos que os elementos $p^m a^p$ e pb^{p^m} estão contidos no subgrupo derivado de $K(p, p^m)$. De fato, temos $p^m a^p = -c.t(p, A)l(p^m, B)$ e $pb^{p^m} = c.t(p^m, B)l(p, A)$. Podemos então escrever

$$c.A^{p-1}B^{p^m-2} = -p^m a^p - c.(t(p, A)l(p^m, B) - A^{p-1}B^{p^m-2})$$

e

$$c.A^{p-2}B^{p^m-1} = pb^{p^m} - c.(t(p^m, B)l(p, A) - A^{p-2}B^{p^m-1}).$$

Todo elemento $g \in K(p, p^m)$ pode ser escrito como $g = a^i b^j v$, onde $0 \leq i \leq p-1$, $0 \leq j \leq p^m-1$ e $v \in V$. Então

$$\begin{aligned} g^{p^m} &= (a^i b^j v)^{p^m} \\ &= ip^{m-1}a^p + jb^{p^m} - c.t(j, B)t(i, A) \sum_{k=1}^{p^m-1} t(k, A^i)B^{jk} + v.t(p^m, A^i B^j) \end{aligned}$$

e devemos verificar se a equação

$$\begin{aligned} ip^{m-1}a^p + jb^{p^m} - c.t(j, B)t(i, A) \sum_{k=1}^{p^m-1} t(k, A^i)B^{jk} + v.t(p^m, A^i B^j) = \\ = p^{k-1}(a^p)^{f(b)} + c.t(p, A)t(p^{m+1-k}, B)l(p^{k-1}, B^{p^{m+1-k}})f(B) \end{aligned}$$

possui solução. Como o grau de $f(b)$ é no máximo $p^{m+1-k} - 2$, o termo com maior soma de expoentes em $(a^p)^{t(p^{k-1}, B^{p^{m+1-k}})f(b)}$ será no máximo $c.A^{p-1}B^{p^m-3}$. Então o termo b^{p^m} não aparecerá na expressão

$$p^{k-1}(a^p)^{f(b)} + c.t(p, A)t(p^{m+1-k}, B)l(p^{k-1}, B^{p^{m+1-k}})f(B).$$

Logo p deve dividir j , já que se o termo b^{p^m} surgir na expressão

$$-c.t(j, B)t(i, A) \sum_{k=1}^{p^m-1} t(k, A^i)B^{jk} + v.t(p^m, A^i B^j),$$

será com coeficiente múltiplo de p . Então temos $g = a^i b^{j'p} v$ e

$$g^{p^{m-1}} = ip^{m-2}a^p + j'b^{p^m} - c.t(j'p, B)t(i, A) \sum_{k=1}^{p^{m-1}-1} t(k, A^i)B^{j'kp} + v.t(p^{m-1}, A^i B^{j'p}) \in V.$$

Podemos repetir o argumento m vezes, e concluir que p^m divide j . Então $g = a^i v'$, $v' \in V$, e $g^p \in V$. Logo a equação pode ser reescrita para g^p como

$$g^p = ia^p + v'.t(p, A^i) = p^{k-1}(a^p)^{f(b)} + c.t(p, A)t(p^{m+1-k}, B)l(p^{k-1}, B^{p^{m+1-k}})f(B),$$

e utilizando o mesmo argumento com a^p , finalmente podemos concluir que p divide i e $g \in V$. Então $K(p, p^m)/N_k$ é livre de torção, com dimensão

$$rk(V) - rk(N_k) = p^{m+1} - 1 - (p^{m+1-k} - 1) = p^{m+1} - p^{m+1-k} = p^{m+1-k}(p^k - 1).$$

Note que como $K(p, p^m)$, o quociente $K(p, p^m)/N_k$ também possui *point-group* isomorfo a $C_p \times C_{p^m}$, pois não é isomorfo a um quociente de $K(p, p^{m-1})$. ■

Observação: Vimos no Capítulo 2 que o grupo $K(p, p^m)$ possui quociente livre de torção isomorfo a $K(p, p^{m'})$ para todo $1 \leq m' \leq m$. De fato, se $N_{m'}$ for o fecho normal em $K(p, p^m)$ do subgrupo $\langle (a^p)^{t(p^{m'}, b)}, (b^{p^{m'}})^{t(p, a)}, [c, b^{p^{m'}}] \rangle$, temos $K(p, p^m)/N_{m'} \cong K(p, p^{m'})$. Neste caso, para $1 \leq m' \leq m-1$, teremos

$$R_{m'} = \mathbb{Q} \otimes (N_{m'} \cap V) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \bigoplus_{j=m'+1}^m M_{1j_i} \bigoplus_{j=m'+1}^m M_{2j}.$$

Proposição 4.2 *O grupo $K(p, p^m)$ não possui quociente livre de torção com quociente derivado isomorfo a $C_p \times C_{p^m}$.*

Dem. Sejam V o subgrupo de translações de $K(p, p^m)$, $M = \mathbb{Q} \otimes V$ e N um subgrupo normal, não trivial de $K(p, p^m)$. Então $R = \mathbb{Q} \otimes (N \cap V)$ é submódulo não trivial de M . Vimos que M se decompõe em soma direta de $mp + 1$ submódulos irredutíveis, não equivalentes, e que R é igual à soma de alguns destes submódulos. Suponha que $K(p, p^m)/N$ seja livre de torção. Pelo Lema 4.3, temos que $(ab^k)^{p^m} \in M_{11_i}$, para $1 \leq i \leq p - 1$ e $k + i = p^m$. Além disso vimos também que $b^{p^m} \in M_3$. Então temos $M_3, M_{11_i} \not\subseteq R$. Vamos dividir as possibilidades para R em 2 casos.

Primeiro vamos supor $M_{21} \not\subseteq R$. Neste caso, segue do Lema 4.2 e da observação anterior a esta Proposição que $K(p, p^m)/N$ possui quociente isomorfo a $K(p, p)$. Como $K(p, p)$ possui quociente derivado $C_{p^2} \times C_{p^2}$, é claro que $K(p, p^m)/N$ não pode ter quociente derivado $C_p \times C_{p^m}$.

Vamos supor agora que $M_{21} \subseteq R$. Se $m = 1$, então está claro que $K(p, p^m)/N$ não é livre de torção, pois $a^p \in M_{21}$. Seja então $m \geq 2$. Verificamos quais dos submódulos M_{12_i}, M_{22} estão contidos em R . Pelo Lema 4.3 temos que M_{12_i} não pode pertencer a R , já que $(ab^{kp})^{p^m} \in M_{21} \oplus M_{12_i}$ para $1 \leq i \leq p - 1$ e $k + i = p^{m-1}$. Se $M_{22} \subseteq R$, fazemos a mesma verificação com os submódulos M_{13_i}, M_{23} , e assim sucessivamente. Como $a^p \in M_2$, temos que existe $2 \leq s \leq m$, tal que $M_{21} \oplus \dots \oplus M_{2(s-1)} \subseteq R$, e $M_{1s_i}, M_{2s} \not\subseteq R$, para $1 \leq i \leq p - 1$.

Agora vamos aplicar a Proposição 4.1 com o grupo $K(p, p^s)$. Se N_2 for o fêcho normal em $K(p, p^s)$ do subgrupo gerado por $(a^p)^{t(p, b^{p^{s-1}})}$, então $H = K(p, p^s)/N_2$ é livre de torção e possui quociente derivado isomorfo a $C_{p^2} \times C_{p^{s+1}}$. Mas novamente segue do Lema 4.2 e da observação anterior que $K(p, p^m)/N$ possui um quociente isomorfo a H , não podendo desta forma ter quociente derivado $C_p \times C_{p^m}$. ■

Teorema 4.5 *Existe um grupo metabeliano, finitamente gerado, livre de torção com quociente derivado isomorfo a $C_{p^n} \times C_{p^m}$ se, e somente se $n, m \geq 2$.*

Dem. De acordo com a Proposição 4.1, precisamos apenas mostrar que não existe grupo metabeliano finitamente gerado, livre de torção com quociente derivado isomorfo a $C_p \times C_{p^m}$, para $m \geq 1$. Suponha então que exista grupo metabeliano G nas condições acima, com $G/G' \cong C_p \times C_{p^m}$. Se x, y são geradores de G modulo G' e

$H = \langle x, y \rangle$, então segue do Teorema 4.4 que H é um grupo de Bieberbach, 2-gerado, metabeliano, com $\frac{H}{H'} \cong \frac{G}{G'} \cong C_p \times C_{p^m}$. Além disso, pela Proposição 2.1 o grupo H deve ser isomorfo a um quociente livre de torção de $K(p, p^m)$. Mas a Proposição anterior nos diz que $K(p, p^m)$ não possui quociente livre de torção com estas características e chegamos assim a uma contradição. ■

4.2 Quocientes de $K(p, p^2)$

Vamos calcular os quocientes livres de torção de

$$K(p, p^2) = \left\langle a, b \mid (a^p)^{t(p^2, b)}, (b^{p^2})^{t(p, a)}, [[a, b], a^p], [[a, b], b^{p^2}], \text{ metabeliano} \right\rangle.$$

O grupo $K(p, p^2)$ é um grupo de Bieberbach de dimensão $p^3 - 1$, com *point-group* isomorfo a $C_p \times C_{p^2}$ e quociente derivado isomorfo a $C_{p^3} \times C_{p^3}$.

Se V é o subgrupo de translações de $G = K(p, p^2)$, vimos na seção anterior que o $\mathbb{Q}[\frac{G}{V}]$ -módulo $M = \mathbb{Q} \otimes V$ se decompõe da forma

$$M = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \bigoplus_{j=1}^2 M_{1ji} \bigoplus_{j=1}^2 M_{2j} \bigoplus M_3,$$

onde M_{11i} , M_{21} e M_3 possuem dimensão $p-1$, e M_{12i} , M_{22} possuem dimensão $p(p-1)$. A ação de a e b nestes submódulos foi também descrita na seção anterior.

Temos $b^{p^2} \in M_3$ e $a^p \in M_2$. Além disso, $(a^p)^{t(p, b^p)} \in M_{21}$ e $(a^p)^{t(p, b)} \in M_{22}$, sendo que os dois elementos não nulos. Além disso, segue do Lema 4.3 que

$$(ab^k)^{p^2} \in M_{11i}$$

para $1 \leq i \leq p-1$ e $k+i = p^2$, e

$$(ab^{kp})^p \in M_{12i} \oplus M_{21}$$

para $1 \leq i \leq p-1$ e $k+i = p$. Para este último caso, temos

$$\begin{aligned} ((ab^{kp})^p)^{t(p, b^p)} &= (a^p)^{t(p, b^p)} + kpb^{p^2} - c.t(kp, B) \sum_{i=1}^{p-1} t(i, A)(B^{kp})^i t(p, B^{kp}) \\ &= (a^p)^{t(p, b^p)} + kpb^{p^2} \\ &\quad - c.(1 + B^p + \dots + B^{p(k-1)})t(p, B)t(p, B^p) \sum_{i=1}^{p-1} t(i, A)(B^{kp})^i \\ &= (a^p)^{t(p, b^p)} + kpb^{p^2} - kc.t(p^2, B)l(p, A) \\ &= (a^p)^{t(p, b^p)} \in M_{21}, \end{aligned}$$

e temos que $0 \neq ((ab^{kp})^p)^{t(p,b)} \in M_{12_i}$.

Lema 4.6 Para $1 \leq i \leq p-1$, temos $(b^p)^{t(p,a^i)} \in M_{22} \oplus M_{12_k}$, onde $ik \equiv 1 \pmod p$.

Dem. Utilizando a notação aditiva, temos

$$(b^p)^{t(p,a^i)} = b^{p^2} - c.t(p, B)t(i, A) \sum_{j=1}^{p-1} t(j, A^i) B^{p(p-1-j)}.$$

Se mostrarmos que $(b^p)^{t(p,a^i)(a-1)(a-b^{kp})} = 0$, então segue que $(b^p)^{t(p,a^i)} \in M_{21} \oplus M_{22} \oplus M_{12_k}$. Primeiro calculamos

$$\begin{aligned} (b^p)^{t(p,a^i)(a-1)} &= (b^{p^2})^{a-1} - c.t(p, B)(A^i - 1) \sum_{j=1}^{p-1} t(j, A^i) B^{p(p-1-j)} \\ &= -c.t(p^2, B) - c.t(p, B) \sum_{j=1}^{p-1} (A^{ij} - 1) B^{p(p-1-j)} \\ &= -c.t(p^2, B) + c.t(p, B)t(p, B^p) - c.t(p, B) \sum_{j=0}^{p-1} A^{ij} B^{p(p-1-j)} \\ &= -c.t(p, B) \sum_{j=0}^{p-1} A^{ij} B^{p(p-1-j)}. \end{aligned}$$

Agora, se fizermos $s = p-1-j$, teremos

$$\begin{aligned} (b^p)^{t(p,a^i)(a-1)(a-b^{kp})} &= -c.t(p, B)(A - B^{kp}) \sum_{j=0}^{p-1} A^{ij} B^{p(p-1-j)} \\ &= -c.t(p, B) \sum_{s=0}^{p-1} A^{i(p-1-s)+1} B^{ps} + \\ &\quad + c.t(p, B) \sum_{s=0}^{p-1} A^{i(p-1-s)} B^{p(s+k)}. \end{aligned}$$

Após reordenarmos os termos de $c.t(p, B) \sum_{s=0}^{p-1} A^{i(p-1-s)} B^{p(s+k)}$, teremos

$$\begin{aligned} c.t(p, B) \sum_{s=0}^{p-1} A^{i(p-1-s)} B^{p(s+k)} &= c.t(p, B) \sum_{s=0}^{p-1} A^{i(p-1-s)} B^{p(s+k)} \\ &= c.t(p, B) \sum_{s=0}^{p-1} A^{i(p-1-s+k)} B^{ps} \\ &= c.t(p, B) \sum_{s=0}^{p-1} A^{i(p-1-s)+1} B^{ps}, \end{aligned}$$

pois $ik \equiv 1 \pmod p$. Então $(b^p)^{t(p,a^i)(a-1)(a-b^{kp})} = 0$ e

$$(b^p)^{t(p,a^i)} \in M_{21} \oplus M_{22} \oplus M_{12_k}.$$

Para mostrarmos que $(b^p)^{t(p,a^i)} \in M_{22} \oplus M_{12_k}$, basta provarmos que $(b^p)^{t(p,a^i)t(p,b^p)} = 0$.

$$\begin{aligned} (b^p)^{t(p,a^i)t(p,b^p)} &= pb^{p^2} - c.t(p, B)t(p, B^p)t(i, A) \sum_{j=1}^{p-1} t(j, A^i) B^{p(p-1-j)} \\ &= pb^{p^2} - c.t(p^2, B)t(i, A) \sum_{j=1}^{p-1} t(j, A^i) \\ &= pb^{p^2} - c.t(p^2, B)t(i, A)l(p, A^i). \end{aligned}$$

Agora temos $c.l(p, A^i)(A^i - 1) = c.(t(p, A^i) - p) = c.(t(p, A) - p) = c.d(A)l(p, A)$. Então

$$c.(l(p, A^i)t(i, A) - l(p, A))d(A) = 0,$$

e $c.l(p, A^i)t(i, A) - c.l(p, A) \in M_2$. Desta forma temos $c.l(p, A^i)t(i, A) = c.l(p, A) + m_2$, onde $m_2 \in M_2$. Mas como $m_2.t(p^2, B) = 0$, temos

$$\begin{aligned} (b^p)^{t(p, a^i)t(p, b^p)} &= pb^{p^2} - c.t(p^2, B)t(i, A)l(p, A^i) \\ &= pb^{p^2} - c.t(p^2, B)l(p, A) = 0. \end{aligned}$$

Deste modo, para $1 \leq i \leq p-1$, temos $(b^p)^{t(p, a^i)} \in M_{22} \oplus M_{12_k}$, onde $ik \equiv 1 \pmod p$. Além disso, é simples verificarmos que este elemento possui componentes não nulos nestes dois submódulos. ■

Proposição 4.3 *O grupo $K(p, p^2)$ possui $\frac{2^p-2}{p}+2$ quocientes próprios, não isomorfos, livres de torção.*

Dem. Novamente, considere $N \trianglelefteq G = K(p, p^2)$ e $R = \mathbb{Q} \otimes (N \cap V)$. Vimos que R será soma de alguns dos submódulos irredutíveis obtidos na decomposição de M . Como são $2p+1$ submódulos irredutíveis, temos que analisar $2^{2p+1} - 1$ casos (excluimos o caso trivial) para R . Segue do Lema 4.2 que para cada caso de R analisado, existe no máximo um subgrupo normal N com $\mathbb{Q} \otimes (N \cap V) = R$ e $\frac{G}{N}$ livre de torção.

Como $b^{p^2} \in M_3$ e $(ab^k)^{p^2} \in M_{11_i}$, onde $k+i = p^2$, já vimos que não poderemos ter M_3 ou $M_{11_i} \subseteq R$. Temos então $2^{p+1} - 1$ casos para estudar. Primeiramente se $M_{21} \subseteq R$, segue do Lema 4.3 que não poderemos ter nenhum outro submódulo de M contido em R . Seja então $N = \langle (a^p)^{t(p, b^p)} \rangle^G$. É claro que $\mathbb{Q} \otimes N = M_{21}$. Agora na Proposição 4.1 mostramos que

$$\frac{G}{N} \cong \left\langle a, b \mid (a^p)^{t(p, b^p)}, (b^{p^2})^{t(p, a)}, [[a, b], a^p], [[a, b], b^{p^2}], \text{ metabeliano} \right\rangle$$

é grupo de Bieberbach, de dimensão $p^3 - 1 - p + 1 = p^3 - p$, com *point-group* isomorfo a $C_p \times C_{p^2}$ e quociente derivado $C_{p^2} \times C_{p^3}$. Note que o grupo acima não possui quocientes livres de torção, sendo minimal quanto a esta propriedade. **Vamos denotar este grupo por T_M .**

Agora R pode ser soma de quaisquer dos submódulos M_{12_j} e M_{22} . Temos então $2^p - 1$ casos a estudar. Se encontrarmos $N \trianglelefteq V$, tal que $\mathbb{Q} \otimes N = R$ e $\frac{V}{N}$ seja livre de torção, será suficiente, já que segue do Lema 4.2 e da observação após a Proposição 4.1 que o grupo $\frac{G}{N}$ possui um quociente isomorfo a $K(p, p)$, com núcleo do epimorfismo contido em $\frac{V}{N}$.

Seja R igual a apenas um destes submódulos, por exemplo M_{22} . Se $N = \langle (a^p)^{t(p,b)} \rangle^G$, então $\mathbb{Q} \otimes N = M_{22}$ e se computarmos a matriz dos geradores de $\frac{V}{N}$ na forma Normal de Smith, podemos mostrar de modo semelhante à demonstração da Proposição 4.1 que $\frac{V}{N}$ é livre de torção. Então

$$\frac{G}{N} \cong \langle a, b \mid (a^p)^{t(p,b)}, (b^{p^2})^{t(p,a)}, [[a, b], a^p], [[a, b], b^{p^2}], \text{ metabeliano} \rangle$$

é grupo de Bieberbach, de dimensão $p^3 - 1 - p^2 + p = (p^2 + 1)(p - 1)$. Também possui *point-group* isomorfo a $C_p \times C_{p^2}$ e quociente derivado isomorfo a $C_{p^2} \times C_{p^3}$. Todos os outros casos para R igual apenas um destes submódulos serão isomorfos ao caso acima, pelo isomorfismo induzido pelo automorfismo de $K(p, p^2)$ da forma $a \mapsto ab^p, b \mapsto b$; ver Capítulo 3. **Vamos denotar este grupo por T_1 .**

Supor agora que R seja soma de dois dos submódulos M_{12_j}, M_{22} . Se $p = 2$, devemos ter $\frac{G}{N} \cong K(2, 2)$. Se p for ímpar, temos $\binom{p}{2}$ possibilidades, mas utilizando o isomorfismo induzido pelo automorfismo dado acima, podemos supor que $M_{22} \subseteq R$ e teremos assim apenas $\frac{1}{p} \binom{p}{2} = \frac{p-1}{2}$ casos a analisar. Vimos que

$$(b^p)^{t(p,a^i)} \in M_{22} \oplus M_{12_k},$$

onde $ik \equiv 1 \pmod{p}$. Seja então $N_k = \langle (a^p)^{t(p,b)}, (b^p)^{t(p,a^i)} \rangle^G$, para $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$. Podemos novamente mostrar que $\frac{V}{N_k}$ é livre de torção, já que N_k é submódulo puro de V . E como $\frac{G}{N_k}$ possui $K(p, p)$ como quociente, com o núcleo do epimorfismo contido em $\frac{V}{N_k}$, temos que

$$\frac{G}{N_k} \cong \langle a, b \mid (a^p)^{t(p,b)}, (b^p)^{t(p,a^i)}, (b^{p^2})^{t(p,a)}, [[a, b], a^p], [[a, b], b^{p^2}], \text{ metabeliano} \rangle$$

é grupo de Bieberbach, de dimensão $p^3 - 1 - 2(p^2 - p)$, com *point-group* isomorfo a $C_p \times C_{p^2}$ e quociente derivado $C_{p^2} \times C_{p^2}$. Temos $\frac{p-1}{2}$ grupos e utilizando o Teorema 1.7 do Capítulo 1, podemos mostrar que eles são todos não isomorfos, já que não existe homomorfismo semi-linear (f, σ) entre os respectivos subgrupos de translações, com $f(m \cdot A^i B^j) = f(m) \cdot \sigma(A^i B^j)$. **Vamos denotar estes grupos por $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2i_2}$, onde $i_2 = \frac{p-1}{2}$.**

Se R for soma de n dos submódulos M_{12_j}, M_{22} , $3 \leq n \leq p - 1$, utilizando o automorfismo definido anteriormente, podemos supor $M_{22} \subseteq R$ e teremos assim $\frac{1}{p} \binom{p}{n} = i_n$ quocientes livres de torção, não isomorfos (novamente pelo Teorema 1.7), definidos da seguinte forma: Para cada n , obtemos R_k , $1 \leq k \leq i_n$, e definimos $N_k = V \cap R_k$.

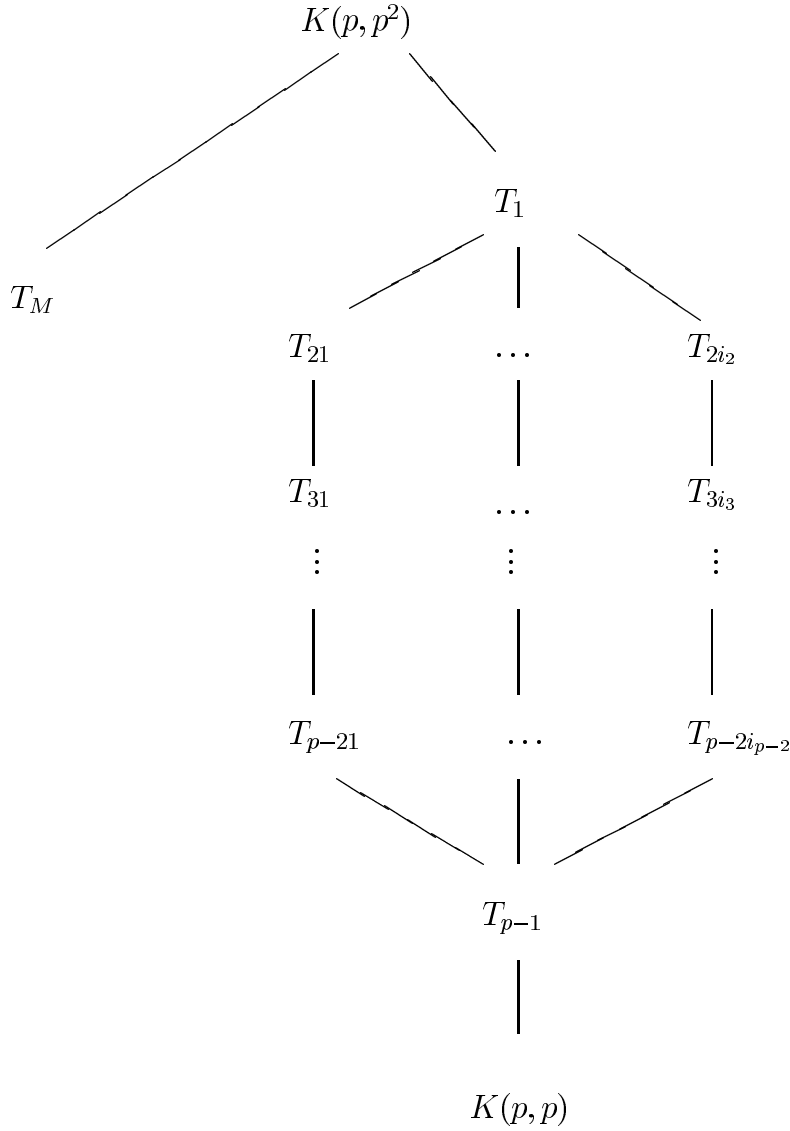


Figura 4.1: $\Lambda_{p,1,2}$

Então N_k é submódulo puro de V e $\frac{V}{N_k}$ será livre de torção. Como $\frac{G}{N_k}$ possui quociente isomorfo a $K(p, p)$, com núcleo do epimorfismo contido em $\frac{V}{N_k}$, temos que $\frac{G}{N_k}$ é **grupo de Bieberbach de dimensão $p^3 - 1 - n(p^2 - p)$** . Além disso, G/K_k possui *point-group* isomorfo a $C_p \times C_{p^2}$ (senão seria isomorfo a $K(p, p)$) e quociente derivado isomorfo a $C_{p^2} \times C_{p^2}$. De fato, são todos quocientes de alguns dos T_{2j} definidos acima e possuem $K(p, p)$ como quociente. Mas ambos possuem quociente derivado isomorfo a $C_{p^2} \times C_{p^2}$. **Vamos denotar estes grupos por T_{n1}, \dots, T_{ni_n} .**

Finalmente se R for soma dos p submódulos M_{22}, M_{12_j} , teremos $\frac{G}{N}$ isomorfo a

$K(p, p)$. Temos então o reticulado de $\Lambda_{p,1,2}$, o conjunto dos quocientes livres de torção, não isomorfos de $K(p, p^2)$ (Figura 4.1). Temos então $\frac{2^p-2}{p}+2$ quocientes próprios livres de torção. Notamos que T_M e $K(p, p)$ são os que não possuem quocientes próprios também livre de torção. ■

Vamos descrever explicitamente os quocientes para $p = 2$ e 3. Considere

$$K(2, 4) = \langle a, b \mid (a^2)^{t(4,b)}, (b^4)^{t(2,a)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle.$$

O grupo $K(2, 4)$ tem dimensão igual a 7, *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_4$ e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_8$. Temos 3 quocientes próprios, não isomorfos, livres de torção de $K(2, 4)$, a saber :

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle a, b \mid (a^2)^{1+b^2}, (b^4)^{t(2,a)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\ H_2 &= \langle a, b \mid (a^2)^{1+b}, (b^4)^{t(2,a)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\ H_3 &= K(2, 2). \end{aligned}$$

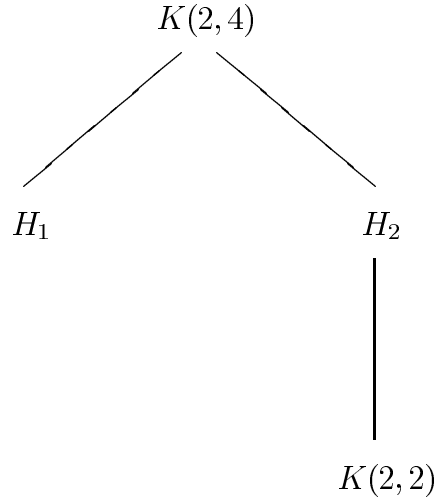


Figura 4.2: $\Lambda_{2,1,2}$

Os grupos H_1 e H_2 possuem dimensão 6 e 5, respectivamente. Ambos possuem *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_4$ e quociente derivado $C_4 \times C_8$.

Considere agora

$$K(3, 9) = \langle a, b \mid (a^3)^{t(9,b)}, (b^9)^{t(3,a)}, [[a, b], b^9], [[a, b], a^3], \text{ metabeliano} \rangle.$$

O grupo $K(3, 9)$ tem dimensão igual a 26, *point-group* isomorfo a $C_3 \times C_9$ e quociente derivado isomorfo a $C_{27} \times C_{27}$. Temos 4 quocientes próprios, não isomorfos, livres de torção de $K(3, 9)$:

$$P_1 = \langle a, b \mid (a^3)^{t(3,b^3)}, (b^9)^{t(3,a)}, [[a, b], b^9], [[a, b], a^3], \text{ metabeliano} \rangle$$

$$P_2 = \langle a, b \mid (a^3)^{t(3,b)}, (b^9)^{t(3,a)}, [[a, b], b^9], [[a, b], a^3], \text{ metabeliano} \rangle$$

$$P_3 = \langle a, b \mid (a^3)^{t(3,b)}, (b^9)^{t(3,a)}, (b^3)^{t(3,a)}, [[a, b], b^9], [[a, b], a^3], \text{ metabeliano} \rangle$$

$$P_4 = K(3, 3).$$

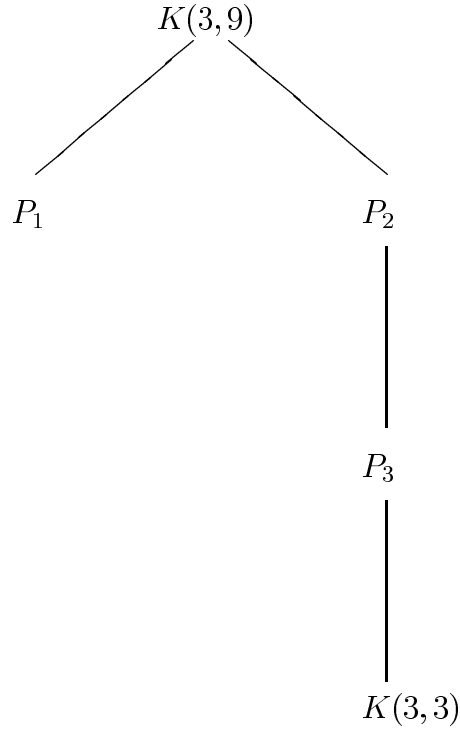


Figura 4.3: $\Lambda_{3,1,2}$

O grupo P_1 tem dimensão 24, *point-group* isomorfo a $C_3 \times C_9$ e quociente derivado $C_9 \times C_{27}$. O grupo P_2 tem dimensão 20, *point-group* isomorfo a $C_3 \times C_9$ e quociente derivado $C_9 \times C_{27}$. O grupo P_3 tem dimensão 14, *point-group* isomorfo a $C_3 \times C_9$ e quociente derivado $C_9 \times C_9$. Temos então o reticulado para $\Lambda_{3,1,2}$ (Figura 4.3).

Note que apesar de termos para p ímpar casos em que obtemos quocientes com *point-group* isomorfo a $C_p \times C_{p^2}$ e quociente derivado isomorfo a $C_{p^2} \times C_{p^2}$, isso não ocorre quando $p = 2$.

4.3 Os grupos $K(2, 8)$ e $K(4, 4)$

Como já havíamos apontado, o método utilizado para obter os quocientes livres de torção de $K(p^n, p^m)$ torna-se muito trabalhoso com o aumento de p, n, m , devido ao crescimento exponencial dos casos a serem analisados para R . Vamos agora analisar os casos $K(2, 8)$ e $K(4, 4)$, que vão ilustrar bem as dificuldades que surgem.

Muitas vezes, utilizaremos resultados obtidos com auxílio do GAP [28] e de outros programas de cálculo de álgebra linear. Na maioria dos casos, o único problema é mostrar que para $N \trianglelefteq G$, o grupo $\frac{V}{N}$ é livre de torção, já que o quociente estudado terá um quociente livre de torção conhecido, com núcleo do epimorfismo contido em $\frac{V}{N}$.

Primeiramente seja

$$K(2, 8) = \langle a, b \mid (a^2)^{t(8,b)}, (b^8)^{t(2,a)}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle.$$

Temos que $K(2, 8)$ possui dimensão $2^4 - 1 = 15$, *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_{16} \times C_{16}$. O módulo $M = \mathbb{Q} \otimes V$ se decompõe em soma direta de 7 submódulos irredutíveis, não equivalentes,

$$M = M_{11} \oplus M_{12} \oplus M_{13} \oplus M_{21} \oplus M_{22} \oplus M_{23} \oplus M_3,$$

com a seguinte base :

$$\begin{aligned} M_{11} - & \quad c.d(A)d(B)(B^4 + 1)(B^2 + 1) = e_1 \\ M_{12} - & \quad c.d(A)d(B)(B^4 + 1)(B + 1) = e_2 \\ & \quad c.d(A)d(B)(B^4 + 1)(B + 1)B = e_3 \\ M_{13} - & \quad c.d(A)d(B)(B^2 + 1)(B + 1) = e_4 \\ & \quad c.d(A)d(B)(B^2 + 1)(B + 1)B = e_5 \\ & \quad c.d(A)d(B)(B^2 + 1)(B + 1)B^2 = e_6 \\ & \quad c.d(A)d(B)(B^2 + 1)(B + 1)B^3 = e_7 \\ M_{21} - & \quad c.t(2, A)d(B)(B^4 + 1)(B^2 + 1) = f_1 \\ M_{22} - & \quad c.t(2, A)d(B)(B^4 + 1)(B + 1) = f_2 \\ & \quad c.t(2, A)d(B)(B^4 + 1)(B + 1)B = f_3 \\ M_{23} - & \quad c.t(2, A)d(B)(B^2 + 1)(B + 1) = f_4 \\ & \quad c.t(2, A)d(B)(B^2 + 1)(B + 1)B = f_5 \\ & \quad c.t(2, A)d(B)(B^2 + 1)(B + 1)B^2 = f_6 \\ & \quad c.t(2, A)d(B)(B^2 + 1)(B + 1)B^3 = f_7 \\ M_3 - & \quad c.d(A)t(8, B) = g. \end{aligned}$$

Vamos encontrar $c = [a, b]$ em função da base acima. Temos

$$\begin{aligned} t(8, B) - l(8, B)d(B) &= 8 \\ t(2, A) - l(2, A)d(A) &= 2. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} 16c &= c.t(8, B)t(2, A) + c.d(A)d(B)l(8, B)l(2, A) \\ &\quad - c.t(2, A)d(B)l(8, B) - c.t(8, B)d(A)l(2, A). \end{aligned}$$

Também $l(2, A) = 1$, $c.t(8, B)t(2, A) = 0$ e

$$\begin{aligned} l(8, B) &= 7 + 6B + 5B^2 + 4B^3 + 3B^4 + 2B^5 + B^6 \\ &= (B^2 + 1)(B^4 + 1) + 2(B^4 + 1)(B + 1) + 4(B + 1)(B^2 + 1). \end{aligned}$$

Então

$$c = \frac{1}{16}e_1 + \frac{1}{8}e_2 + \frac{1}{4}e_4 - \frac{1}{16}f_1 - \frac{1}{8}f_2 - \frac{1}{4}f_4 - \frac{1}{16}g.$$

Além disso temos

$$a^2 \in M_{21} \oplus M_{22} \oplus M_{23} \text{ e } b^8 \in M_3.$$

Também podemos obter expressões para outros elementos de M .

$$\begin{aligned} (ab)^8 &= 4a^2 + b^8 - c. \sum_{i=1}^7 t(i, A)B^i \\ &= \frac{1}{4}e_1 = (ab^3)^8 = (ab^5)^8 = (ab^7)^8 \in M_{11} \\ (ab^2)^4 &= 2a^2 + b^8 - c.(B + 1)(B^2 + B^4(1 + A) + B^6(2 + A)) \\ &= \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{8}f_1 = (ab^6)^4 \in M_{12} \oplus M_{21} \\ (ab^4)^2 &= a^2 + b^8 - c.(1 + B + B^2 + B^3)B^4 \\ &= \frac{1}{4}e_4 + \frac{1}{4}e_5 + \frac{1}{4}e_6 + \frac{1}{4}e_7 + \frac{1}{16}f_1 \\ &\quad + \frac{1}{8}f_2 + \frac{1}{8}f_3 \in M_{21} \oplus M_{22} \oplus M_{13} \\ [c, b^4] &= c.(-1 + B^4) \\ &= -\frac{1}{2}e_4 + \frac{1}{2}f_4 \in M_{13} \oplus M_{23} \\ [c, b^2] &= c.(-1 + B^2) \\ &= -\frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{4}e_4 + \frac{1}{4}e_6 + \frac{1}{4}f_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}f_4 - \frac{1}{4}f_6 \in M_{12} \oplus M_{13} \oplus M_{22} \oplus M_{23} \\ (b^4)^{1+a} &= b^8 - c.(1 + B + B^2 + B^3) \\ &= -\frac{1}{4}e_4 - \frac{1}{4}e_5 - \frac{1}{4}e_6 - \frac{1}{4}e_7 + \frac{1}{4}f_4 \\ &\quad + \frac{1}{4}f_5 + \frac{1}{4}f_6 + \frac{1}{4}f_7 = -(b^4)^a(b^4) \in M_{13} \oplus M_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((ab^2)^2)^{1+b} &= 2a^2 - b^8 + c((1+A)(1+\dots+B^4) + 1 + B + B^2 + B^5) \\
&= \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}e_4 + \frac{1}{4}e_6 + \frac{1}{4}f_4 - \frac{1}{4}f_6 \in M_{12} \oplus M_{13} \oplus M_{23} \\
((b^2)^{1+a})^2 &= b^8 - c(1+B)(1+B^4) \\
&= -\frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{4}f_2 + \frac{1}{4}f_3 \in M_{12} \oplus M_{22}.
\end{aligned}$$

Proposição 4.4 *O grupo $K(2, 8)$ possui 12 quocientes próprios, não isomorfos, livres de torção.*

Dem. Sejam $N \trianglelefteq G = K(2, 8)$ e $R = \mathbb{Q} \otimes N$. Vamos analisar as possibilidades para o submódulo $R = \mathbb{Q} \otimes (N \cap V)$. São $2^7 - 1$ casos, mas vimos que $b^8 \in M_3$ e $(ab)^8 \in M_{11}$. Logo estes submódulos não podem pertencer a R e temos então que analisar $2^5 - 1 = 31$ casos.

Obviamente R não pode ser a soma dos 5 submódulos $M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}$. Se R for soma de 4 deles, temos 5 casos a estudar, sendo que teremos apenas um caso livre de torção, que é isomorfo a $K(2, 2)$. Nos outros casos teremos as imagens de a , ab^2 ou ab^4 de ordem finita.

Se R for soma de 3 dos submódulos, temos 10 casos a estudar. Em 5 deles não conseguimos quociente livre torção (torção nas imagens de a , ab^4 ou ab^2). Outros 3 serão livres de torção, sendo um isomorfo a H_1 e dois isomorfos a H_2 , grupos definidos na seção anterior, quando estudamos os quocientes de $K(2, 4)$. Nos outros 2 casos, teremos $M_{12} \oplus M_{22} \subseteq R$. Como $((b^2)^{1+a})^2 \in M_{12} \oplus M_{22}$, para que tenhamos um quociente livre de torção, devemos ter $(b^2)(b^2)^a = n_1 \in N$. Mas então

$$\begin{aligned}
(b^4)^{1+a} &= (b^4)(b^2)^a(b^2)^a \\
&= b^2 n_1 b^{-2} n_1 \in N,
\end{aligned}$$

e R deverá ser soma de mais que 3 submódulos. Cairemos então no caso estudado no parágrafo anterior (o quociente deve ser isomorfo a $K(2, 2)$).

Se R for soma de 2 submódulos, teremos novamente 10 casos a estudar. Em um deles ($R = M_{12} \oplus M_{22}$), teremos a mesma situação que descrevemos no parágrafo anterior ($\frac{G}{N} \cong K(2, 2)$). Em outro ($R = M_{12} \oplus M_{21}$), teremos uma potência de ab^2 em N , não sendo possível obter um quociente livre de torção. Nos outros 8, podemos encontrar N com $\frac{G}{N}$ livre de torção.

Primeiro podemos ter $\frac{G}{N} \cong K(2, 4)$. Depois, se $N = \langle (a^2)^{1+b} \rangle^G$, temos que $\frac{G}{N}$ possui quociente isomorfo a H_2 . O núcleo da projeção está em $\frac{V}{N}$, e se computarmos

a matriz de geradores de $\frac{V}{N}$, podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção. Desta forma $\frac{G}{N}$ será extensão de grupo livre de torção por grupo livre de torção, sendo então um grupo de Bieberbach de dimensão $15 - 6 = 9$, com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_4 \times C_{16}$.

Se $N = \langle (ab^4)^2 \rangle^G$, temos que $\frac{G}{N}$ será isomorfo ao grupo acima pelo isomorfismo induzido pelo automorfismo de G , dado por $a \mapsto ab^4$ e $b \mapsto b$. Vamos denotar este automorfismo por τ .

Se $N = \langle (a^2)^{1+b^2} \rangle^G$, teremos desta vez que $\frac{G}{N}$ possui quociente isomorfo a H_1 . O núcleo da projeção está em $\frac{V}{N}$ e novamente podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção. Então $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach de dimensão $15 - 5 = 10$, com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_4 \times C_{16}$. Podemos também utilizar o automorfismo τ e obter outro caso ($N = \langle ((ab^4)^2)^{1+b^2} \rangle^G$).

Seja agora $N = \langle (a^2)^{1+b^4} \rangle^G$. Segue da Proposição 4.1 que $\frac{G}{N}$ é livre de torção, de dimensão $15 - 3 = 12$, com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_4 \times C_{16}$.

Para os últimos 2 casos, se definirmos

$$N = \langle (a^2)^{t(4,b)}, ((ab^2)^4)^{1+b}, b^8 c^{(1+b)(a-b^4)} \rangle,$$

teremos que $\frac{G}{N}$ possui quociente isomorfo a H_2 , e novamente o núcleo da projeção está em $\frac{V}{N}$. Podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção e desta forma $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach de dimensão $15 - 6 = 9$, *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_8$. O último quociente será isomorfo a este, utilizando novamente τ .

Agora se R for igual a apenas um dos submódulos M_{12} , M_{13} , M_{21} , M_{22} ou M_{23} , temos 5 casos para estudar. Vamos ver que para cada um destes casos, podemos obter N com $\frac{G}{N}$ livre de torção.

Primeiramente, se $N = \langle (a^2)^{(1+b^2)(1+b^4)} \rangle^G$, teremos que $\frac{G}{N}$ tem H_1 como quociente. O núcleo da projeção está em $\frac{V}{N}$ e podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção. Desta forma $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach de dimensão $15 - 1 = 14$, com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_{16}$.

Se $N = \langle (a^2)^{(1+b)(1+b^4)} \rangle^G$, teremos que $\frac{G}{N}$ tem H_2 como quociente. Novamente o núcleo da projeção está em $\frac{V}{N}$, que é livre de torção. Então $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach de dimensão $15 - 2 = 13$, com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_{16}$.

Se $N = \langle ((ab^2)^4)^{1+b} \rangle^G$, então $\frac{G}{N}$ possui quociente isomorfo a H_2 , e como nos casos acima, podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção e que $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach de dimensão $15 - 2 = 13$, com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_{16}$.

Cabe notar que estes 2 últimos grupos não são isomorfos, pois o primeiro tem um quociente livre de torção de dimensão igual a 12, o que não ocorre com o segundo.

Finalmente, se $N = \langle (a^2)^{t(4,b)} \rangle^G$, $\frac{G}{N}$ terá $K(2, 4)$ como quociente e $\frac{V}{N}$ será livre de torção. Então $\frac{G}{N}$ será um grupo de Bieberbach de dimensão $15 - 4 = 11$, com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_{16}$. Podemos também utilizar o automorfismo τ e obter o último caso, quando $N = \langle ((ab^4)^2)^{(1+b)(1+b^2)} \rangle^G$.

Estes são todos os casos para $K(2, 8)$. **Então $K(2, 8)$ possui 12 quocientes próprios, não isomorfos, livres de torção :**

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \langle a, b \mid (a^2)^{(1+b^2)(1+b^4)}, (b^8)^{t(2,a)}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_2 &= \langle a, b \mid (a^2)^{(1+b)(1+b^4)}, (b^8)^{t(2,a)}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_3 &= \langle a, b \mid (a^2)^{t(8,b)}, (b^8)^{t(2,a)}, ((ab^2)^4)^{1+b}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_4 &= \langle a, b \mid (a^2)^{t(4,b)}, (b^8)^{t(2,a)}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_5 &= \langle a, b \mid (a^2)^{1+b}, (b^8)^{t(2,a)}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_6 &= \langle a, b \mid (a^2)^{1+b^2}, (b^8)^{t(2,a)}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_7 &= \langle a, b \mid (a^2)^{1+b^4}, (b^8)^{t(2,a)}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_8 &= \langle a, b \mid (a^2)^{t(4,b)}, (b^8)^{t(2,a)}, ((ab^2)^4)^{1+b}, b^8[a, b]^{(1+b)(a-b^4)}, [[a, b], b^8], [[a, b], a^2], \text{ metab.} \rangle \\
Q_9 &= K(2, 4) \\
Q_{10} &= H_1 = \langle a, b \mid (a^2)^{1+b^2}, (b^4)^{t(2,a)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_{11} &= H_2 = \langle a, b \mid (a^2)^{1+b}, (b^4)^{t(2,a)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle \\
Q_{12} &= K(2, 2).
\end{aligned}$$

Os grupos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 possuem *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado $C_8 \times C_{16}$, com dimensões 14, 13, 13 e 11, respectivamente.

Os grupos Q_5, Q_6 e Q_7 possuem *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$ e quociente derivado $C_4 \times C_{16}$, com dimensões 9, 10 e 12, respectivamente.

O grupo Q_8 tem *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_8$, quociente derivado $C_8 \times C_8$ e dimensão igual a 9.

Os grupos $K(2, 2), K(2, 4), H_1$ e H_2 já foram definidos anteriormente.

Pelo reticulado de $\Lambda_{2,1,3}$ (Figura 4.4), podemos notar que dos quocientes obtidos, os grupos Q_7, H_1 e $K(2, 2)$ não possuem quocientes próprios livre de torção. ■

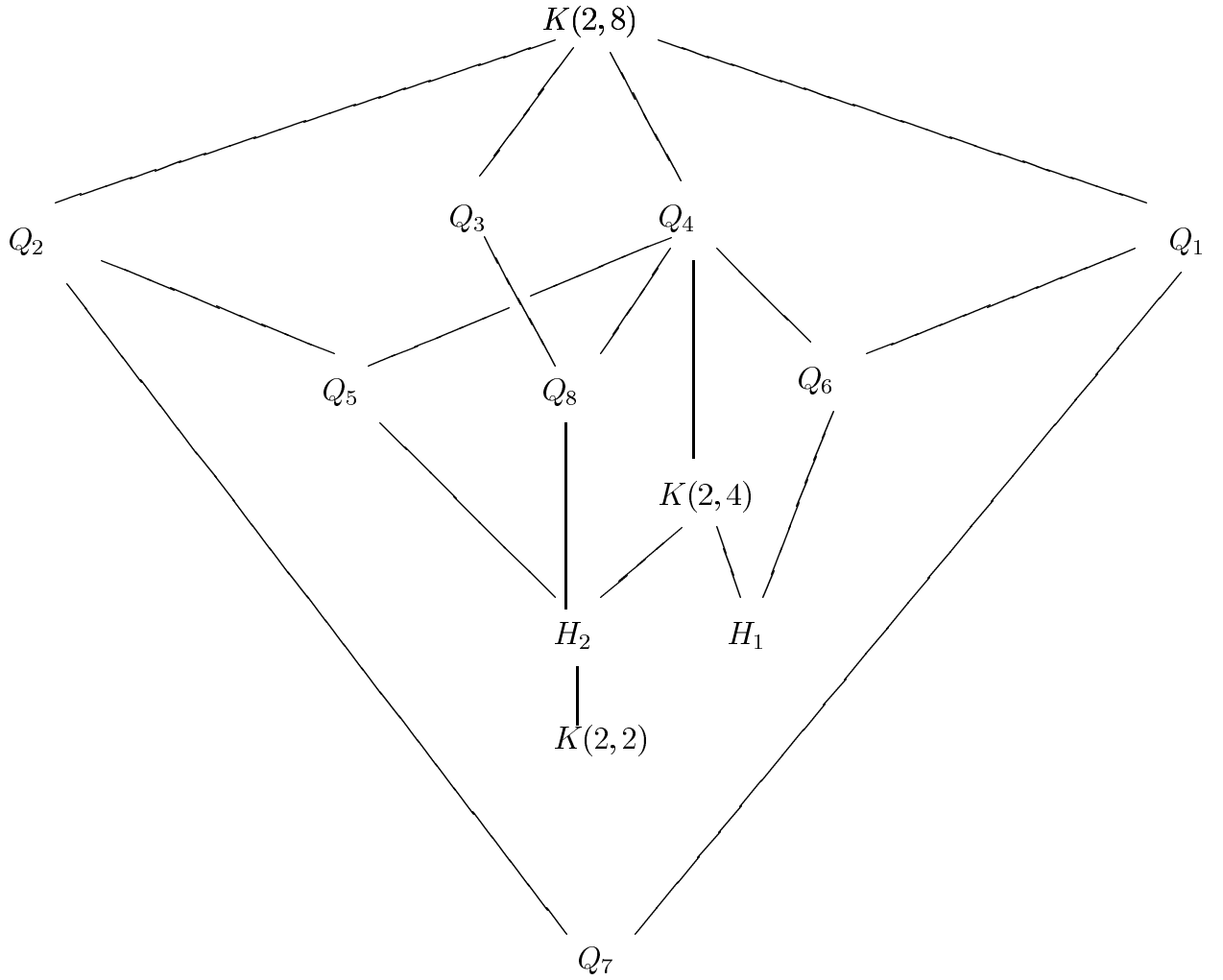


Figura 4.4: $\Lambda_{2,1,3}$

Agora vamos estudar o grupo

$$K(4, 4) = \langle a, b \mid (a^4)^{t(4,b)}, (b^4)^{t(4,a)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle.$$

O grupo $K(4, 4)$ também possui dimensão $2^4 - 1 = 15$ e quociente derivado isomorfo a $C_{16} \times C_{16}$, mas com *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$.

Desta vez $M = \mathbb{Q} \otimes V$ vai se decompor em soma direta de 9 submódulos irreduzíveis, não equivalentes,

$$M = M_{11} \oplus M_{12} \oplus M_{13} \oplus M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{21} \oplus M_{22} \oplus M_{31} \oplus M_{32},$$

com a seguinte base

$$\begin{aligned}
M_{11} - c.d(A)d(B)(A^2 + 1)(B^2 + 1) &= e_1 \\
M_{12} - c.d(A)d(B)(A^2 + 1)(B + 1) &= e_2 \\
&c.d(A)d(B)(A^2 + 1)(B + 1)B = e_3 \\
M_{13} - c.d(A)d(B)(A + 1)(B^2 + 1) &= e_4 \\
&c.d(A)d(B)(A + 1)(B^2 + 1)A = e_5 \\
M_{14} - c.d(A)d(B)(A + 1)(B + 1)(A + B) &= e_6 \\
&c.d(A)d(B)(A + 1)(B + 1)(AB - 1) = e_7 \\
M_{15} - c.d(A)d(B)(A + 1)(B + 1)(A - B) &= e_8 \\
&c.d(A)d(B)(A + 1)(B + 1)(AB + 1) = e_9 \\
M_{21} - c.t(4, A)d(B)(B^2 + 1) &= f_1 \\
M_{22} - c.t(4, A)d(B)(B + 1) &= f_2 \\
&c.t(4, A)d(B)(B + 1)B = f_3 \\
M_{31} - c.t(4, B)d(A)(A^2 + 1) &= g_1 \\
M_{32} - c.t(4, B)d(A)(A + 1) &= g_2 \\
&c.t(4, B)d(A)(A + 1)A = g_3.
\end{aligned}$$

Se Id e U são as matrizes identidade e companheira do polinômio $x^2 + 1$, respectivamente, temos que A age como $-Id$ em M_{11}, M_{12} e M_{31} , e Id em M_{21}, M_{22} , como U em M_{13}, M_{14}, M_{32} e como $-U$ em M_{15} , e B age como $-Id$ em M_{11}, M_{13}, M_{21} , Id em M_{31}, M_{32} , e U em M_{12}, M_{14}, M_{15} , e M_{22} .

Como

$$\begin{aligned}
t(4, A) - l(4, A)d(A) &= 4 \\
t(4, B) - l(4, B)d(B) &= 4,
\end{aligned}$$

teremos

$$\begin{aligned}
16c &= c.t(4, B)t(4, A) + c.d(A)d(B)l(4, B)l(4, A) \\
&- c.t(4, A)d(B)l(4, B) - c.t(4, B)d(A)l(4, A).
\end{aligned}$$

Novamente $c.t(4, B)t(4, A)$ é central e desta forma trivial. Também

$$\begin{aligned}
l(4, x) &= 3 + 2x + x^2 = (x^2 + 1) + 2(x + 1) \\
2 &= (AB + 1) - (AB - 1).
\end{aligned}$$

Então

$$c = \frac{1}{16}e_1 + \frac{1}{8}e_2 + \frac{1}{8}e_4 - \frac{1}{8}e_7 + \frac{1}{8}e_9 - \frac{1}{16}f_1 - \frac{1}{8}f_2 - \frac{1}{16}g_1 - \frac{1}{8}g_2.$$

Vamos encontrar alguns elementos de V nesta base. Temos que

$$a^4 = \frac{1}{8}f_1 + \frac{1}{4}f_2 + \frac{1}{4}f_3 \in M_{21} \oplus M_{22}$$

e

$$b^4 = -\frac{1}{8}g_1 - \frac{1}{4}g_2 - \frac{1}{4}g_3 \in M_{31} \oplus M_{32}.$$

Então

$$\begin{aligned} (a^4)^{1+b} &= \frac{1}{2}f_3 \in M_{22} & , & \quad (a^4)^{1+b^2} = \frac{1}{4}f_1 \in M_{21} \\ (b^4)^{1+a} &= -\frac{1}{2}g_3 \in M_{32} & , & \quad (b^4)^{1+a^2} = -\frac{1}{4}g_1 \in M_{31} \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} (ab)^4 &= a^4 + b^4 - c.(B + B^2(1 + A) + B^3(1 + A + A^2)) \\ &= \frac{1}{8}e_1 + \frac{1}{4}e_8 + \frac{1}{4}e_9 \in M_{11} \oplus M_{15} \\ (ab^2)^4 &= \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{1}{8}f_1 \in M_{12} \oplus M_{21} \\ (ab^3)^4 &= \frac{1}{8}e_1 + \frac{1}{4}e_6 + \frac{1}{4}e_7 \in M_{11} \oplus M_{14} \\ (a^2b)^4 &= \frac{1}{4}e_4 + \frac{1}{4}e_5 - \frac{1}{8}g_1 \in M_{13} \oplus M_{31} \\ (a^2b^2)^2 &= \frac{1}{4}e_6 + \frac{1}{4}e_9 + \frac{1}{8}f_1 - \frac{1}{8}g_1 \in M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{21} \oplus M_{31} \\ (a^2b^3)^4 &= \frac{1}{4}e_4 + \frac{1}{4}e_5 - \frac{3}{8}g_1 \in M_{13} \oplus M_{31} \\ (a^3b)^4 &= \frac{1}{8}e_1 + \frac{1}{4}e_6 - \frac{1}{4}e_7 \in M_{11} \oplus M_{14} \\ (a^3b^2)^4 &= \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_3 + \frac{3}{8}f_1 \in M_{12} \oplus M_{21} \\ (a^3b^3)^4 &= \frac{1}{8}e_1 - \frac{1}{4}e_8 + \frac{1}{4}e_9 \in M_{11} \oplus M_{15}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} [c, b^2] &= -\frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_7 - \frac{1}{4}e_9 + \frac{1}{4}f_2 \in M_{12} \oplus M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{22} \\ [c, a^2b^2] &= -\frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{4}e_4 + \frac{1}{4}f_2 + \frac{1}{4}g_2 \in M_{12} \oplus M_{13} \oplus M_{22} \oplus M_{32} \\ [c, a^2] &= -\frac{1}{4}e_4 + \frac{1}{4}e_7 - \frac{1}{4}e_9 + \frac{1}{4}g_2 \in M_{13} \oplus M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{32} \\ (a^2)^{1+b} &= \frac{1}{8}e_4 + \frac{1}{8}e_5 + \frac{1}{8}e_6 - \frac{1}{8}e_7 + \frac{1}{8}e_8 + \frac{1}{8}e_9 \\ &\quad + \frac{1}{4}f_3 - \frac{1}{8}g_2 - \frac{1}{8}g_3 \in M_{13} \oplus M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{22} \oplus M_{32} \\ (a^2)^{1+b^2} &= \frac{1}{4}e_6 + \frac{1}{4}e_9 + \frac{1}{8}f_1 - \frac{1}{4}g_2 - \frac{1}{4}g_3 \in M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{21} \oplus M_{32} \\ (b^2)^{1+a} &= -\frac{1}{8}e_2 - \frac{1}{8}e_3 - \frac{1}{8}e_6 + \frac{1}{8}e_7 + \frac{1}{8}e_8 - \frac{1}{8}e_9 \\ &\quad + \frac{1}{8}f_2 + \frac{1}{8}f_3 - \frac{1}{4}g_3 \in M_{12} \oplus M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{22} \oplus M_{32} \\ (b^2)^{1+a^2} &= -\frac{1}{4}e_6 - \frac{1}{4}e_9 + \frac{1}{4}f_2 + \frac{1}{4}f_3 - \frac{1}{8}g_1 \in M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{22} \oplus M_{31}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} (a^2)^{t(4,b)} &= \frac{1}{4}e_4 + \frac{1}{4}e_5 + \frac{1}{2}e_6 + \frac{1}{2}e_9 - \frac{3}{4}g_2 - \frac{3}{4}g_3 \in M_{13} \oplus M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{32} \\ (b^2)^{t(4,a)} &= -\frac{1}{4}e_2 - \frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{2}e_6 - \frac{1}{2}e_9 + \frac{3}{4}f_2 + \frac{3}{4}f_3 \in M_{12} \oplus M_{14} \oplus M_{15} \oplus M_{22}. \end{aligned}$$

Vimos no Capítulo anterior que as aplicações $\alpha_i : a \mapsto ab^i, b \mapsto b, \beta_i : a \mapsto a, b \mapsto a^i b$ e $\gamma : a \mapsto b, b \mapsto a$ são automorfismos de $K(4, 4)$. Estes automorfismos induzem permutações de submódulos obtidos na decomposição de M .

Proposição 4.5 *O grupo $K(4, 4)$ possui 19 quocientes próprios, não isomorfos, livres de torção.*

Dem. Novamente, se N for subgrupo normal de $G = K(4, 4)$, vamos estudar os possíveis casos para $R = \mathbb{Q} \otimes (N \cap V)$. Temos 9 submódulos irredutíveis, e desta forma $2^9 - 1$ possibilidades para R . O submódulo R não poderá ser soma de 9, 8 ou 7 dos submódulos, senão teremos uma potência de a , b ou ab em N . Se R for soma direta de 6 submódulos, podemos obter um único caso livre de torção, quando $\frac{G}{N} \cong K(2, 2)$.

Se R for soma direta de 5 submódulos, temos 126 casos a estudar. Se $M_{11} \oplus M_{21} \oplus M_{31} \subset R$, os outros 2 submódulos em R nos darão uma potência de algum gerador de G em N . Estes totalizam 15 casos. Se apenas 2 dos submódulos M_{11}, M_{21}, M_{31} estiverem em R , temos $3 \cdot 20 = 60$ casos. Os outros 3 submódulos em R novamente nos darão uma potência de um gerador de $K(4, 4)$.

Se apenas um dos submódulos M_{11}, M_{21}, M_{31} estiver em R , teremos $3 \cdot 15 = 45$ casos, sendo que em três deles podemos obter N tal que $\frac{G}{N}$ é livre de torção. Podemos utilizar os automorfismos definidos anteriormente, e ver que todos são isomorfos a H_1 , definido no estudo de $K(2, 4)$. Se $M_{11}, M_{21}, M_{31} \not\subset R$, então teremos os últimos 6 casos, em que podemos obter quocientes livres de torção, todos isomorfos a H_2 .

Se R for soma direta de 4 submódulos, temos novamente 126 casos a estudar. Se $M_{11} \oplus M_{21} \oplus M_{31} \subset R$, não conseguimos obter N com $\frac{G}{N}$ livre de torção. Estes somam 6 casos. Se apenas dois dos submódulos M_{11}, M_{21}, M_{31} estiverem em R , temos $3 \cdot 15 = 45$ casos. Em 42 destes, teremos potência de a , b ou ab em N . Nos outros, teremos uma potência de $a^2 b^2$ em N (ou imagem deste elemento pelos automorfismos definidos anteriormente). Mas então devemos ter $a^2 b^2 \in N$, e no quociente, teremos $(a^4)^{t(4,b)} = (b^{-4})^{t(4,b)} = b^{-16} = e$. Então não vamos obter quociente livre de torção.

Se apenas tivermos um dos submódulos M_{11}, M_{21}, M_{31} em R , que somam $3 \cdot 20 = 60$ casos, temos que em 12 deles podemos obter N tal que $\frac{G}{N}$ é livre de torção. Podemos novamente utilizar automorfismos de G e concluir que todos são isomorfos. Seja então $N = \langle (a^2)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a} \rangle^G$. Temos que $\frac{G}{N}$ possui H_1 como quociente. O núcleo da

projeção está em V , e novamente podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção. Desta forma $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach de dimensão $15 - 7 = 8$, com *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$ e quociente derivado isomorfo a $C_4 \times C_8$.

Se $M_{11}, M_{21}, M_{31} \not\subset R$, então teremos os últimos 15 casos, em que podemos obter quocientes livres de torção. Três deles serão isomorfos a $K(2, 4)$. Os outros 12 casos são todos isomorfos e possuem quociente isomorfo a H_2 . Neste caso temos

$$N = \langle (a^4)^{1+b}, ((ab)^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, ((a^2b)^4)^{1+a}, (a^2)^{(1+b)(1+b^2)}, [a, b]^{1+b+a^3+ab} \rangle^G$$

e $\frac{V}{N}$ é livre de torção. Então $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach com dimensão $15 - 8 = 7$, *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_8$.

Se R for soma direta de 3 submódulos, temos 84 casos a estudar. Em 39 destes casos, não conseguimos obter N com $\frac{G}{N}$ livre de torção. Se $M_{11} \oplus M_{21} \oplus M_{31} = R$, e definirmos $N = \langle (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a^2}, ((ab)^4)^{1+a^2} \rangle^G$, podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção. Agora para mostrarmos que $\frac{G}{N}$ é livre de torção, basta mostrarmos que não existe $g \in G \setminus V$, com $g^4 \in N$. Para tal, podemos repetir o método utilizado na demonstração da Proposição 4.1. Então $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, com dimensão $15 - 3 = 12$, *point-group* $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_8$.

Se apenas 2 dos submódulos M_{11}, M_{21}, M_{31} estiverem em R , teremos $3 \cdot 6 = 18$ casos. Em 12 destes não poderemos obter N com $\frac{G}{N}$ livre de torção.

Considere $N = \langle (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a^2}, ((ab)^4)^{1+a} \rangle^G$. Podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção. Novamente, para mostrarmos que $\frac{G}{N}$ é livre de torção, basta então provarmos que não existe $g \in G \setminus V$, com $g^4 \in N$, e repetimos assim parte da demonstração da Proposição 4.1. Então $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, com dimensão $15 - 4 = 11$, *point-group* $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_8$.

Se apenas tivermos 1 dos submódulos M_{11}, M_{21}, M_{31} em R , que somam $3 \cdot 15 = 45$ casos, sendo que em 27 deles não podemos obter N tal que $\frac{G}{N}$ é livre de torção.

Se $N = \langle (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a}, ((a^2b)^4)^{1+a}, (a^2)^{(1+b)(1+b^2)} \rangle^G$, então $\frac{G}{N}$ possui H_1 como quociente, com núcleo em $\frac{V}{N}$, e temos $\frac{V}{N}$ livre de torção. O grupo $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, de dimensão $15 - 5 = 10$, *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$, e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_8$. Outros 5 casos serão isomorfos a este grupo.

Se $N = \langle (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a}, ((ab)^4)^{1+a} \rangle^G$, novamente $\frac{G}{N}$ possui H_1 como quociente, com núcleo em $\frac{V}{N}$, que é livre de torção. Então $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, de dimensão $15 - 5 = 10$, *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$, e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_8$. Outros 11 casos são isomorfos a este.

Utilizando o Teorema 1.7 do Capítulo 1, podemos mostrar que os dois grupos acima não são isomorfos, já que novamente não conseguimos obter homomorfismo semi-linear (f, σ) entre os respectivos subgrupos translações.

Se $M_{11}, M_{21}, M_{31} \not\subset R$, então teremos os últimos 20 casos. Se

$$N = \langle (a^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, ((a^2b)^4)^{1+a}, (a^2)^{(1+b)(1+b^2)} \rangle^G,$$

então $\frac{G}{N}$ possui H_2 como quociente. Podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção e desta forma $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, de dimensão $15 - 6 = 9$, *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$, e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_8$. São no total 12 casos isomorfos a este.

Se $N = \langle (a^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, ((ab)^4)^{1+a} \rangle^G$ ou $N = \langle (a^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, ((ab^3)^4)^{1+a} \rangle^G$, então $\frac{G}{N}$ possui H_2 como quociente, novamente $\frac{V}{N}$ é livre de torção e então $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, de dimensão $15 - 6 = 9$, *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$, e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_8$. Dos outros 6 casos, 3 serão isomorfos ao primeiro grupo e 3 isomorfos ao segundo.

Novamente, utilizando o Teorema 1.7, podemos mostrar que os três grupos acima não são isomorfos.

Se R for soma direta de 2 submódulos, temos 36 casos a estudar. Destes, em 6 teremos torção em um dos geradores de G .

Seja $N = \langle (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a^2} \rangle^G$. Temos que $\frac{V}{N}$ é livre de torção e $\frac{G}{N}$ tem como quociente um (de fato dois) dos grupos obtidos no estudo de R igual a soma de 3 submódulos, com núcleo em $\frac{V}{N}$. Então $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, com dimensão $15 - 2 = 13$, *point-group* $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_8$. Teremos 2 outros casos isomorfos.

Se $N = \langle (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a} \rangle^G$, o grupo $\frac{G}{N}$ possui H_1 como quociente, e como $\frac{V}{N}$ será livre de torção, temos que $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, com dimensão $15 - 3 = 12$, *point-group* $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_8$. Outros 11 casos serão isomorfos a este grupo. Note que estes grupos não são isomorfos a um grupo de mesma dimensão, *point-group* e quociente derivado, obtido quando estudamos o caso R soma de 3 submódulos, já que aquele não possuía H_1 como quociente.

Se $N = \langle (a^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a} \rangle^G$, então o grupo $\frac{G}{N}$ tem H_2 como quociente e como acima, $\frac{G}{N}$ será grupo de Bieberbach, com dimensão $15 - 4 = 11$, *point-group* $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_8$. Teremos outros 11 casos isomorfos a este.

Seja agora $N = \langle (b^4)^{1+a}, ((a^2b)^4)^{1+a}, (a^2)^{(1+b)(1+b^2)} \rangle^G$. Temos que $\frac{G}{N}$ possui quociente isomorfo a $K(2, 4)$, e novamente $\frac{G}{N}$ será grupo de Bieberbach, com dimensão $15 - 4 = 11$, *point-group* $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_8$. Os últimos 2 casos são isomorfos a este.

Nenhum dos 2 grupos acima é isomorfo ao grupo de mesma dimensão, *point-group* e quociente derivado, obtido quando estudamos o caso em que R era soma de 3 submódulos, já que aquele não possuía $K(2, 4)$ ou H_2 como quociente. E novamente, utilizando o Teorema 1.7, podemos mostrar que estes dois grupos acima também não são isomorfos.

Agora seja R igual a apenas um dos submódulos da decomposição de M . Temos 9 casos a estudar. Se $N = \langle (a^4)^{1+b} \rangle^G$, então $\frac{G}{N}$ tem $K(2, 4)$ como quociente. Podemos mostrar que $\frac{V}{N}$ é livre de torção e desta forma, $\frac{G}{N}$ será grupo de Bieberbach, com dimensão $15 - 2 = 13$, *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$, e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_{16}$. Cinco outros casos serão isomorfos a este.

Se $N = \langle (a^4)^{1+b^2} \rangle^G$, novamente $\frac{V}{N}$ é livre de torção, e como $\frac{G}{N}$ tem H_1 como quociente, temos que $\frac{G}{N}$ é grupo de Bieberbach, com dimensão $15 - 1 = 14$, *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$, e quociente derivado isomorfo a $C_8 \times C_{16}$. Os dois outros casos serão isomorfos a este, considerando $N = \langle (b^4)^{1+a^2} \rangle^G$ e $N = \langle ((ab)^4)^{1+b^2} \rangle^G$.

Então temos abaixo a lista dos quocientes livres de torção de $K(4, 4)$:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{t(4,a)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_2 &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b}, (b^4)^{t(4,a)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_3 &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a^2}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_4 &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_5 &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_6 &= \langle a, b \mid (b^4)^{1+a}, ((a^2b)^4)^{1+a}, (a^2)^{(1+b)(1+b^2)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_7 &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a^2}, ((ab)^4)^{1+a^2}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_8 &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a^2}, ((ab)^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_9 &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a}, ((a^2b)^4)^{1+a}, (a^2)^{(1+b)(1+b^2)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_{10} &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a}, ((ab)^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_{11} &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, ((a^2b)^4)^{1+a}, (a^2)^{(1+b)(1+b^2)}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_{12} &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, ((ab)^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle \\
S_{13} &= \langle a, b \mid (a^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, ((ab^3)^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle
\end{aligned}$$

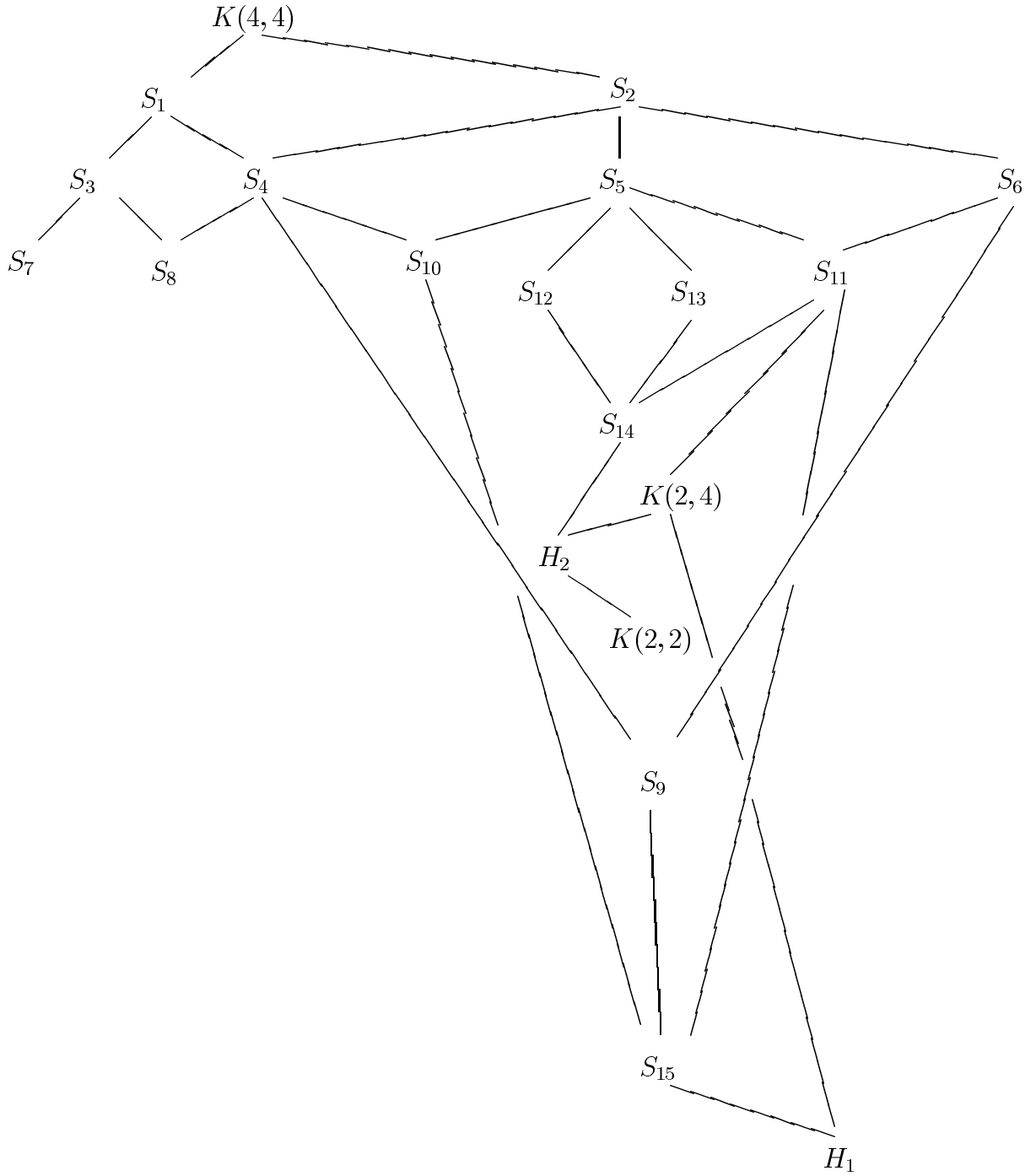


Figura 4.5: $\Lambda_{2,2,2}$

$$S_{14} = \langle a, b \mid (a^4)^{1+b}, ((ab)^4)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, ((a^2b)^4)^{1+a}, (a^2)^{(1+b)(1+b^2)}, [a, b]^{1+b+a^3+ab}, \\ [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle$$

$$S_{15} = \langle a, b \mid (a^2)^{1+b^2}, (a^4)^{t(4,b)}, (b^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^4], \text{ metabeliano} \rangle$$

$$S_{16} = K(2, 4)$$

$$S_{17} = H_1 = \langle a, b \mid (a^2)^{1+b^2}, (b^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle$$

$$S_{18} = H_2 = \langle a, b \mid (a^2)^{1+b}, (b^4)^{1+a}, [[a, b], b^4], [[a, b], a^2], \text{ metabeliano} \rangle$$

$$S_{19} = K(2, 2).$$

Os grupos S_1 e S_2 possuem *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_{16}$, com dimensões 14 e 13, respectivamente.

Os grupos $S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}$ e S_{14} possuem *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$ e quociente derivado $C_8 \times C_8$, com dimensões 13, 12, 11, 11, 12, 11, 10, 10, 9, 9, 9 e 7 respectivamente.

O grupo S_{15} tem *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_4$, quociente derivado $C_4 \times C_8$ e dimensão 8.

Os grupos $K(2, 2)$, $K(2, 4)$, H_1 e H_2 já foram definidos anteriormente.

Destes, temos que S_7, S_8, H_1 e $K(2, 2)$ são os que não possuem quocientes próprios também livre de torção (Figura 4.5). ■

Teorema 4.7 *Se G for um grupo metabeliano, finitamente gerado, livre de torção, com quociente derivado isomorfo a $C_4 \times C_4$, então G é isomorfo a*

$$K(2, 2) = \langle a, b \mid (a^2)^{1+b}, (b^2)^{1+a}, [[a, b], a^2], [[a, b], b^2], \text{ metabeliano} \rangle,$$

o grupo fundamental da variedade de Hantzsche-Wendt.

Dem. Sejam $a, b \in G$ geradores de G modulo G' e $H = \langle a, b \rangle$. Então $G = HG'$ e segue do Teorema 4.4 que H é um grupo metabeliano 2-gerado, livre de torção, com

$$\frac{H}{H'} \cong \frac{G}{G'} \cong C_4 \times C_4.$$

Além disso, ambos os grupos H e G são grupos de Bieberbach. Se denotarmos por V_H o subgrupo de translações de H , temos que $H' \leq V_H$ e segue da Proposição 2.1 que H é isomorfo a um quociente livre de torção de $K(4, 4)$.

Analisando a lista de quocientes livres de torção de $K(4, 4)$ obtida na Proposição 4.5, temos que $K(2, 2)$ é o único destes quocientes com quociente derivado isomorfo a $C_4 \times C_4$. Então $H \cong K(2, 2)$. Além disso, podemos repetir parte da demonstração da Proposição 2.3, e mostrar que $G' = [G', H]H'$, definir o subgrupo $N = (G')^2H'$, e utilizando o segundo e o terceiro termos da série central descendente de $\frac{G}{N}$, mostrar que $G' = N = (G')^2H'$. Então

$$\dim(G) = \text{posto}(G') = \text{posto}(H') = \dim(H) = 3.$$

Logo G é um grupo de Bieberbach de dimensão 3, com quociente derivado isomorfo a $C_4 \times C_4$. Mas segue de [8] que o único grupo de Bieberbach satisfazendo a estas

condições é isomorfo ao grupo fundamental da variedade de Hantzsche-Wendt, i.e., $G \cong K(2, 2)$. ■

Capítulo 5

Métodos Computacionais

O terceiro Teorema de Bieberbach afirma que para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto de representantes de classes de isomorfismo de grupos cristalográficos (e de Bieberbach) de dimensão n é finito. Assim, um problema natural a ser estudado seria a obtenção deste conjunto para um dado n . A solução deste problema para $n = 1, 2$ e 3 foi obtida no final do século passado, utilizando principalmente métodos geométricos [22]. Em 1948 H. Zassenhaus apresentou um algoritmo [38], baseado em conceitos algébricos, que nos permite determinar o conjunto de representantes de classes de isomorfismo de grupos cristalográficos de dimensão n . Vamos descrever abaixo os principais pontos em que se baseia este algoritmo.

Vimos que se G for um grupo cristalográfico de dimensão n , então podemos considerar G como um subgrupo de M_n , o grupo de isometrias do espaço Euclidiano n -dimensional. Além disso, segue do primeiro Teorema de Bieberbach que o *point-group* P de G é isomorfo a um subgrupo finito de $GL(n, \mathbb{Z})$. Seja \wp_n o conjunto de representantes de classes de conjugação de subgrupos finitos de $GL(n, \mathbb{Z})$. Segue do Teorema de Jordan-Zassenhaus que para todo n , o conjunto \wp_n é finito. Por exemplo, para $n = 1, 2, 3$ e 4 , o conjunto \wp_n possui 2, 13, 73 e 710 elementos, respectivamente.

Sejam então P um subgrupo finito de $GL(n, \mathbb{Z})$ e $N(P)$ seu normalizador em $GL(n, \mathbb{Z})$. Zassenhaus mostrou que $N(P)$ é sempre finitamente gerado. Uma aplicação $\nu : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada um *sistema de vetores para P* se para quaisquer $x_1, x_2 \in P$, temos

$$\nu(x_1 x_2) \equiv \nu(x_1) + x_1 \cdot \nu(x_2) \pmod{\mathbb{Z}^n},$$

onde $x_1 \cdot \nu(x_2)$ corresponde à ação da matriz x_1 sobre o elemento $\nu(x_2) \in \mathbb{R}^n$. O

conjunto de sistemas de vetores para P forma um grupo aditivo, que vamos denotar por $V(P, \mathbb{R}^n)$. Para qualquer sistema de vetores $\nu \in V(P, \mathbb{R}^n)$, o conjunto

$$R(P, \nu) = \left\{ \begin{pmatrix} x & \nu(x) + t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in P, t \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

é um grupo cristalográfico (dado através de sua representação afim), que vamos chamar de *o grupo cristalográfico associado a P e ν* .

Para qualquer $t \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $\nu_t : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\nu_t : x \mapsto t - x.t$, constitui um sistema de vetores para P . O conjunto $I(P, \mathbb{R}^n) = \{\nu_t \mid t \in \mathbb{R}^n\}$ forma um subgrupo normal de $V(P, \mathbb{R}^n)$, que vamos chamar de *o subgrupo de sistemas internos de vetores para P* . Pode-se mostrar que

$$V(P, \mathbb{R}^n)/I(P, \mathbb{R}^n) \cong H^1(P, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \cong H^2(P, \mathbb{Z}^n).$$

Podemos definir uma ação de $N(P)$ sobre o grupo $V(P, \mathbb{R}^n)$ de sistemas de vetores para P da seguinte forma : se $y \in N(P)$, então a imagem de $\nu \in V(P, \mathbb{R}^n)$ por y é definida como $\nu^y : x \mapsto y.\nu(x^y)$. Como o subgrupo $I(P, \mathbb{R}^n)$ é invariante sob esta ação, ela induz uma ação sobre $H^1(P, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$. Zassenhaus mostrou que dados dois sistemas de vetores $\nu_1, \nu_2 \in V(P, \mathbb{R}^n)$, os grupos cristalográficos $R(P, \nu_1)$ e $R(P, \nu_2)$ são isomorfos se, e somente se, ν_1 e ν_2 representarem elementos em $H^1(P, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ que estejam na mesma órbita sob a ação de $N(P)$; ver [38].

Então dados o conjunto \wp_n de representantes de classes de conjugação de subgrupos finitos de $GL(n, \mathbb{Z})$ e os geradores do normalizador de cada elemento de \wp_n em $GL(n, \mathbb{Z})$, o algoritmo de Zassenhaus permite o cálculo do conjunto de representantes de classes de isomorfismo de grupos cristalográficos de dimensão n . Em 1966 H. Brown [7] implementou o algoritmo de Zassenhaus para obtenção de grupos cristalográficos. Em 1973, a lista de normalizadores para subgrupos finitos de $GL(4, \mathbb{Z})$ foi obtida. Utilizando estes dados, foi obtida lista completa de grupos cristalográficos de dimensão ≤ 4 ; ver [8]. Temos a seguinte tabela :

dimensão	1	2	3	4
n° de grupos cristalográficos	2	17	219	4783
n° de grupos de Bieberbach	1	2	10	74

Cabe notar a importância do uso da informática para obtenção da lista dos grupos cristalográficos já em dimensão 4. Além disso, mesmo quando dispomos dos dados

necessários ao algoritmo de Zassenhaus, obtenção da lista completa de grupos cristalográficos para dimensões maiores em forma impressa torna-se impraticável, devido ao grande crescimento do número de classes de isomorfismo.

No período de outubro/98 a março/99, estive como visitante (bolsa de Doutorado Sandwich) na Lehrstuhl B für Mathematik, RWTH-Aachen, sob a supervisão do Prof. Wilhelm Plesken. A equipe do Prof. Plesken desenvolve um pacote computacional, chamado CARAT, com o objetivo de calcular e classificar grupos cristalográficos de dimensão até 6; ver [23]. As primeiras versões de CARAT estão disponíveis *via* Internet no endereço <http://samuel.math.rwth-aachen.de/~LBFM/carat/>. Um dos projetos realizados durante minha visita foi o desenvolvimento e implementação de um algoritmo, a ser incluído no pacote CARAT, que decide se um dado grupo cristalográfico é livre de torção (i.e., é grupo de Bieberbach) e, caso positivo, se possui centro trivial (ou equivalentemente, quociente derivado finito). Utilizando este programa e o banco de dados de CARAT, foi possível calcular e listar todos grupos de Bieberbach (a menos de isomorfismo) em dimensão 5. A seguir faremos uma descrição do algoritmo implementado e dos resultados obtidos.

5.1 CARAT e Algoritmos

Os principais problemas estudados por CARAT são a enumeração, reconhecimento e comparação de grupos cristalográficos de dimensão ≤ 6 . CARAT considera um grupo cristalográfico G de dimensão n como um subgrupo dos movimentos rígidos M_n , dado através de sua representação afim, i.e., o grupo G é visto como um subgrupo de $GL(n+1, \mathbb{R})$.

Então a descrição do grupo G é dada baseada na seguinte propriedade : Se x_1, x_2, \dots, x_k são os geradores do *point-group* $P \leq GL(n, \mathbb{Z})$ de G , então o conjunto de geradores G pode ser dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_k & v_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} Id & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

onde v_1, \dots, v_k são certos vetores em \mathbb{Q}^n e Id é a matriz identidade $n \times n$; ver[8].

Dizemos que dois grupos cristalográficos de dimensão n pertencem a mesma \mathbb{Q} -classe (resp., \mathbb{Z} -classe), se seus *point-groups*, considerados como subgrupos finitos de $GL(n, \mathbb{Z})$, forem conjugados em $GL(n, \mathbb{Q})$ (resp., $GL(n, \mathbb{Z})$). Estas definições nos dão

origem a duas classificações de grupos cristalográficos, que refletem mais as características geométricas destes grupos. Segue do Teorema de Jordan-Zassenhaus que existe um número finito de \mathbb{Q} -classes para cada n . Além disso, cada \mathbb{Q} -classe se subdivide em um número finito de \mathbb{Z} -classes, que por sua vez também se subdivide em um número finito de classes de isomorfismo.

CARAT possui em seu banco de dados um representante para cada \mathbb{Q} -classe de grupos cristalográficos nas dimensões 2 a 6, tendo a capacidade de calcular representantes das diferentes \mathbb{Z} -classes contidas em uma determinada \mathbb{Q} -classe, bem como representantes de classes de isomorfismo contidas em cada \mathbb{Z} -classe. A descrição dos principais algoritmos nos quais se baseia o pacote CARAT pode ser encontrada em [23].

Seja então um grupo cristalográfico G dado através dos geradores $g_1, g_2, \dots, g_k \in GL(n+1, \mathbb{R})$, conforme descrito acima, com

$$g_i = \begin{pmatrix} x_i & v_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $x_i \in GL(n, \mathbb{Z})$ é gerador do *point-group* P de G , e $v_i \in \mathbb{Q}^n$. Vamos denotar por $\phi : G \rightarrow P$ a projeção de G sobre o *point-group* P , e V o subgrupo de translações de G . Segue do Teorema 1.6 do Capítulo 1 que o grupo cristalográfico G é livre de torção se, e somente se, para todo elemento $x \in P$ de ordem prima, o grupo $\hat{S} = \langle V, g \rangle$ for livre de torção, onde $g \in \phi^{-1}(x)$ é representante da classe lateral G modulo V .

Então para todo primo p divisor da ordem de P , sejam $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} \subseteq P$ o conjunto de elementos de ordem p e $\hat{S}_i = \langle V, h_i \rangle$, onde $h_i \in \phi^{-1}(y_i)$, i.e.,

$$h_i = \begin{pmatrix} y_i & v_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se \hat{S}_i possui torção, então existe $\hat{v} = \begin{pmatrix} Id & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$, com $v \in \mathbb{Z}^n$, tal que $(h_i \hat{v})^p = e$.

Então

$$(h_i \hat{v})^p = \begin{pmatrix} y_i & v_i + y_i \cdot v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} y_i^p & t(p, y_i) \cdot (v_i + v) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id,$$

e devemos ter $t(p, y_i) \cdot (v_i + v) = 0$. **Logo \hat{S}_i terá torção se, e somente se, $t(p, y_i) \cdot v_i \in t(p, y_i) \cdot \mathbb{Z}^n$.**

Suponha agora que y_1 e y_2 sejam conjugados em P e o grupo $\hat{S}_1 = \langle V, h_1 \rangle$ tenha torção, onde $h_1 \in \phi^{-1}(y_1)$. Sejam então $x \in P$ tal que $y_1^x = y_2$, e

$$g = \begin{pmatrix} x & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Vamos definir o elemento $h_2 \in \phi^{-1}(y_2)$ como

$$h_2 = h_1^g = \begin{pmatrix} y_1^x & (Id - y_1^x).w + x.v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $v_2 = (Id - y_2).w + x.v_1$. Mas então

$$t(p, y_2).v_2 = t(p, y_2)x.v_1 = xt(p, y_1).v_1 \in xt(p, y_1).\mathbb{Z}^n \subseteq t(p, y_2).\mathbb{Z}^n.$$

Logo $\hat{S}_2 = \langle V, h_2 \rangle$ também possui torção. Deste modo precisamos apenas testar as **extensões para representantes de classes de conjugação de subgrupos cíclicos de ordem prima** do *point-group* P .

Já que V é subgrupo abeliano maximal de G , para encontrarmos o centro de G , basta calcularmos o centralizador de G em V .

Temos então os principais pontos do algoritmo para testar se um dado grupo cristalográfico é livre de torção.

1. Dados os geradores g_1, g_2, \dots, g_s de G , podemos obter o *point-group* P através dos geradores $\phi(g_1), \phi(g_2), \dots, \phi(g_s)$, e construir uma lista de representantes das classes laterais G modulo V .
2. Calculamos o conjunto de representantes das classes de conjugação de elementos de P , e podemos então refinar a lista acima para obtermos lista de representantes das classes laterais G modulo V deste conjunto.
3. Para todo primo p divisor da ordem de P , obtemos desta lista os elementos $g \in G$, tais que $\phi(g)^p = e$, e testamos se $t(p, \phi(g)).v_g \in t(p, \phi(g)).\mathbb{Z}^n$, onde v_g é componente de translação de g . Caso negativo para todo p , o grupo G é livre de torção.
4. Caso o grupo seja livre de torção, procuramos solução para o sistema $\phi(g_i).v = v$, para todos $\phi(g_1), \phi(g_2), \dots, \phi(g_s)$ geradores do *point-group* P . Se tivermos apenas a solução trivial, o centro de G é trivial.

O programa foi escrito na linguagem C e utiliza várias funções do banco de dados de CARAT. Ele foi testado utilizando os grupos cristalográficos de dimensões 2, 3 e 4, e obteve resultados corretos de acordo com [8]. Após algumas adaptações para satisfazer o padrão utilizado em CARAT, ele foi adicionado ao seu banco de dados, podendo ser utilizado para determinar os grupos de Bieberbach de dimensão ≤ 6 .

Vamos denotar por C_n o grupo cíclico de ordem n , por D_n o grupo diedral de ordem n , por S_n e A_n os grupos simétrico e alternado de n letras, e por Γ o grupo de ordem 16 e classe de nilpotência 2, isomorfo a $(C_2 \times C_2) \rtimes C_4$.

Em [8], pág. 408, podemos encontrar a lista dos grupos de Bieberbach para dimensões ≤ 4 . É claro que para todo $n \geq 1$, sempre existe um grupo de Bieberbach n -dimensional com *point-group* trivial, a saber $G \cong \mathbb{Z}^n$ e $\frac{\mathbb{R}^2}{G}$ homeomorfo ao toro *flat*. Para dimensão igual a 2, o único outro grupo de Bieberbach possui *point-group* isomorfo a C_2 , sendo $\frac{\mathbb{R}^2}{G}$ homeomorfo à garrafa de Klein.

Dos dez grupos de Bieberbach de dimensão 3, obtemos seis classes de isomorfismo para *point-groups*, a saber $C_s, 1 \leq s \leq 4, C_6$ e $C_2 \times C_2$. Somente um dos grupos de Bieberbach 3-dimensional possui quociente derivado finito. Este é exatamente o grupo fundamental da variedade de Hantzsche-Wendt, que é isomorfo ao grupo $K(2, 2)$.

Para dimensão 4, são 14 classes de isomorfismo de *point-groups*, sendo que 9 são abelianos. Um deles, que é isomorfo a $A_4 \times C_2$, possui ordem 24 e todos os outros possuem ordem no máximo 12. Quatro grupos de Bieberbach de dimensão 4 possuem quociente derivado finito, sendo um com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_2$, outros dois com *point-group* $C_2 \times C_2 \times C_2$, e o último com *point-group* isomorfo ao grupo diedral D_8 .

5.2 Grupos de Bieberbach de dimensão 5

A partir da lista de representantes de \mathbb{Q} -classes de grupos cristalográficos de dimensão 5, CARAT gerou um total de **222.018 grupos cristalográficos em dimensão 5**. Utilizando nosso programa, obtivemos lista com **1060 grupos de Bieberbach de dimensão 5, sendo 101 com centro trivial e 959 com centro não trivial**.

Dos 101 grupos de Bieberbach com centro trivial, obtivemos 3 grupos com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_2$, 38 com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_2 \times C_2$, 23 com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$, 3 com *point-group* isomorfo a $C_2 \times C_4$, 11

com *point-group* isomorfo a D_8 , 4 com *point-group* isomorfo a D_{12} , 15 com *point-group* isomorfo a $D_8 \times C_2$, e 4 grupos com *point-group* isomorfo ao grupo Γ definido acima.

Teorema 5.1 *Um grupo finito P pode ser realizado como point-group de um grupo de Bieberbach de dimensão 5 com centro trivial se, e somente se, for isomorfo a $C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_4$, D_8 , D_{12} , $D_8 \times C_2$ ou Γ .*

Em [31], Szczepański utiliza métodos teóricos (classificação de grupos de pequena ordem e caracterização de grupos primitivos [18]) para obter Teorema semelhante, mas incluindo na lista acima o grupo $C_4 \times C_2 \times C_2$. Ele apresenta um exemplo de grupo de Bieberbach com tal *point-group* e centro trivial (pág. 200), mas de fato o exemplo é falso, pois o grupo apresentado não é livre de torção; por exemplo, o elemento $c_2.b_2.a_2$ possui ordem 4.

Em um artigo posterior [32], baseado na construção de Calabi (ver Capítulo 1), Szczepański complementa a lista de seu Teorema de [31] para apresentar os representantes de classes de isomorfismo de grupos finitos que podem ser realizados como *point-group* de um grupo de Bieberbach de dimensão 5 (tendo ou não centro trivial). Neste caso, o Teorema está de acordo com os nossos resultados, já que de fato existe grupo de Bieberbach de dimensão 5 com *point-group* isomorfo a $C_4 \times C_2 \times C_2$, mas *tendo centro não trivial*.

Teorema 5.2 *Um grupo finito $P \neq \{e\}$ pode ser realizado como point-group de um grupo de Bieberbach de dimensão 5 se, e somente se, for isomorfo a C_n , para $2 \leq n \leq 6$ e $n = 8, 10, 12$, $C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_4$, $C_4 \times C_2 \times C_2$, $C_3 \times C_3$, $C_6 \times C_2$, $C_6 \times C_3$, $C_6 \times C_2 \times C_2$, $C_{12} \times C_2$, S_3 , D_8 , D_{12} , $D_8 \times C_2$, $S_3 \times C_3$, $D_{12} \times C_2$, A_4 , $A_4 \times C_2$, $A_4 \times C_2 \times C_2$, S_4 ou Γ .*

A seguir apresentamos lista completa de representantes de classes de isomorfismo de grupos de Bieberbach de dimensão 5 com centro trivial.

5.2.1 Grupos de dimensão 5 com centro trivial

A notação utilizada nesta listagem segue o padrão de [8]. Os grupos de Bieberbach são vistos como grupos de matrizes $\subseteq GL(6, \mathbb{Q})$, dados através de sua representação afim.

Os grupos são denotados por TRI. n , $1 \leq n \leq 101$. Fornecemos os geradores do *point-group* $P \in GL(5, \mathbb{Z})$ de cada \mathbb{Z} -classe, e para cada representante de classe de isomorfismo pertencente a esta \mathbb{Z} -classe, são listados abaixo dos geradores de P seus respectivos componentes de translação, sendo seus coeficientes escritos sobre um denominador comum, i.e.,

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \end{bmatrix} / n = \begin{bmatrix} a/n & b/n & c/n & d/n & e/n \end{bmatrix} .$$

Por exemplo, para o grupo TRI.29 fornecemos os geradores do *point-group*

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

e seus respectivos componentes de translação

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 2 \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 2 \end{array}$$

Então o grupo TRI.29, como subgrupo de $GL(6, \mathbb{Q})$, é gerado pelos elementos

$$\left(\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e pelo conjunto

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\},$$

que são os geradores do subgrupo de translações V .

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.1 e TRI.2

1 0 0 0 0	0 1 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	-1 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 0 1 0	0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 -1 0 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.1

[-2 0 -4 4 0] /4
[0 0 0 2 -1] /4
[-2 2 0 4 -2] /4
[0 0 2 2 2] /4

comp. de translacao de TRI.2

[-2 2 -4 4 0] /4
[0 0 0 2 -1] /4
[0 0 0 4 -2] /4
[0 0 2 2 2] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.3

-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	0 1 0 0 0
0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0	1 0 0 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.3

[-2 2 0 0 0] /4
[0 0 0 0 2] /4
[0 0 2 2 1] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.4

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 1 0 1 1	0 0 1 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 1 -1 -1	0 -1 0 -1 -1	0 0 -1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.4

[-1 -1 0 0 0] /2
[0 1 0 2 1] /2
[1 0 -2 1 1] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.5 e TRI.6

1 0 0 0 0	0 -1 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	1 0 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.5

[0 0 -1 -2 0] /2
[0 0 0 0 1] /2
[0 0 1 -1 1] /2

comp. de translacao de TRI.6

[-1 -1 -1 -2 0] /2
[0 1 0 0 1] /2
[0 0 1 -1 1] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.7 a TRI.22

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.7

[1 0 0 0 0] /2
[0 0 1 0 0] /2
[-1 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.8

[1 1 0 0 0] /2
[0 0 1 0 0] /2
[-1 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.9

[1 0 1 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2
[0 1 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.10

[1 0 1 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2
[0 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.11

[0 1 1 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2
[0 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.12

[1 1 1 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2
[0 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.13

[0 0 1 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2
[-1 1 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.14

[0 0 1 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2
[-1 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.15

[1 0 1 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2
[-1 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.16

[0 1 1 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2
[-1 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.17	comp. de translacao de TRI.18
[1 1 1 0 0] /2	[1 1 0 0 0] /2
[0 0 0 1 0] /2	[0 0 1 1 0] /2
[-1 1 0 0 -1] /2	[0 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.19	comp. de translacao de TRI.20
[1 1 0 0 0] /2	[1 1 1 0 0] /2
[0 0 1 1 0] /2	[0 0 0 1 1] /2
[-1 1 0 0 -1] /2	[0 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.21	comp. de translacao de TRI.22
[0 0 1 0 0] /2	[0 0 1 0 0] /2
[0 0 0 1 1] /2	[0 0 0 1 1] /2
[-1 1 0 0 0] /2	[-1 1 0 0 -1] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.23

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 0 1 -1	0 0 0 -1 1	0 0 1 0 0
0 0 1 0 1	0 0 -1 0 -1	0 0 -1 0 -1
0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 -1 -1 0

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.23

[0 0 0 -1 1] /2
[1 0 0 0 0] /2
[0 -1 -1 1 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.24

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1
0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.24

[0 0 0 -1 1] /2
[1 0 0 0 0] /2
[0 1 -1 0 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.25

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 1 1 1
0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 -1 1
0 0 1 0 1	0 0 -1 0 -1	0 0 -1 0 -1
0 0 1 1 0	0 0 -1 -1 0	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.25

[0 1 0 -1 1] /2
 [1 0 -1 2 1] /2
 [0 0 0 1 1] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.26

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 0 0 -1
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.26

[0 1 0 0 0] /2
 [0 0 1 -1 1] /2
 [1 0 0 0 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.27

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 0 -1 1	0 0 0 1 -1	0 0 0 0 -1
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0
0 0 1 1 0	0 0 -1 -1 0	0 0 -1 0 0

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.27

[0 0 0 -1 -1] /2
 [1 0 0 -3 -1] /2
 [0 -1 0 1 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.28

-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 4

comp. de translacao de TRI.28

[0 0 0 1 0] /2
[1 0 1 0 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.29

-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 4

comp. de translacao de TRI.29

[0 0 1 0 0] /2
[-1 1 0 0 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.30 a TRI.32

-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	0 1 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	1 0 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.30

[0 0 0 -2 0] /4
[0 0 0 0 2] /4
[0 0 2 -1 0] /4

comp. de translacao de TRI.31

[0 0 0 -2 0] /4
[2 2 0 0 0] /4
[0 0 2 -1 0] /4

comp. de translacao de TRI.32

[0 0 0 -2 0] /4
[2 2 0 0 2] /4
[0 0 2 -1 0] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.33

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 -1 0 -1 -1	0 0 -1 1 1	0 1 0 0 0
0 0 -1 1 1	0 -1 0 -1 -1	0 0 -1 1 1
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 0 1
0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 0 1 0

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.33

[0 1 -2 -1 -1] /2
[1 0 1 1 0] /2
[0 1 -1 0 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.34

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 0 1 -1	0 0 -1 -1 0	0 0 1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0	0 0 -1 0 -1
0 0 -1 -1 0	0 0 0 1 -1	0 0 -1 -1 0

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.34

[-2 0 -2 0 -2] /4
[0 2 -2 0 2] /4
[-1 0 -2 2 0] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.35

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 0 1 -1	0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 1
0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0	0 0 -1 0 -1
0 0 -1 -1 0	0 0 -1 0 0	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.35

[0 -2 -2 2 0] /4
[0 0 0 2 0] /4
[2 -1 0 2 2] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.36

-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	0 1 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	1 0 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.36

[0 0 0 -1 -1] /2
 [1 1 0 -2 0] /2
 [0 0 1 -1 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.37

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 1
0 0 0 -1 1	0 0 0 1 -1	0 0 0 -1 0

O point-group tem ordem 12

comp. de translacao de TRI.37

[3 0 0 0 0] /6
 [0 3 3 0 0] /6
 [0 -2 0 0 0] /6

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.38

-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 0 0 1
0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0

O point-group tem ordem 12

comp. de translacao de TRI.38

[0 0 3 3 -3] /6
 [-3 3 0 0 0] /6
 [-2 0 0 0 0] /6

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.39

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 1
0 0 0 -1 1	0 0 0 -1 1	0 0 0 -1 0

O point-group tem ordem 12

comp. de translacao de TRI.39

[3 0 0 0 0] /6
[0 3 3 0 0] /6
[0 -2 0 0 0] /6

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.40

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 1
0 0 0 -1 -1	0 0 0 -1 -1	0 0 0 -1 -1

O point-group tem ordem 12

comp. de translacao de TRI.40

[3 0 0 0 0] /6
[0 3 3 0 0] /6
[0 -2 0 0 0] /6

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.41 e TRI.42

0 1 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
1 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 0 1 0	0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.41

[-2 0 -2 0 0] /4
[-2 2 -2 2 0] /4
[0 2 0 0 1] /4
[2 2 0 0 2] /4

comp. de translacao de TRI.42

[-2 0 2 0 0] /4
[-2 2 2 -2 0] /4
[0 0 0 2 1] /4
[0 0 2 -2 2] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.43 a TRI.47

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.43

[0 0 0 1 0] /2
[0 -1 0 1 0] /2
[1 0 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.44

[0 0 0 1 1] /2
[0 -1 0 1 0] /2
[1 0 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.45

[1 0 0 0 0] /2
[0 0 -1 1 0] /2
[0 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.46

[1 0 0 1 0] /2
[0 0 -1 1 0] /2
[0 1 0 0 -1] /2

comp. de translacao de TRI.47

[1 0 0 1 1] /2
[0 0 -1 1 0] /2
[0 1 0 0 -1] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.48

-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.48

[0 2 0 0 0] /4
[2 0 0 0 0] /4
[1 0 0 2 2] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.49 a TRI.59

-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.49

[0 0 0 1 1] /2
[0 1 -1 0 0] /2
[1 0 1 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.50

[0 0 0 0 1] /2
[1 0 -1 0 0] /2
[1 0 1 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.51

[0 0 0 0 1] /2
[0 1 -1 0 0] /2
[1 0 1 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.52

[0 0 0 1 0] /2
[1 0 -1 0 0] /2
[0 0 1 0 1] /2

comp. de translacao de TRI.53

[0 0 0 1 0] /2
[0 1 -1 0 0] /2
[1 0 1 0 1] /2

comp. de translacao de TRI.54

[0 0 0 0 1] /2
[0 1 -1 0 0] /2
[1 0 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.55

[0 0 0 1 1] /2
[0 1 -1 0 0] /2
[1 0 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.56

[0 0 0 0 1] /2
[1 0 -1 0 0] /2
[1 0 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.57

[0 0 0 0 1] /2
[0 1 -1 0 0] /2
[1 0 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.58

[0 0 0 1 1] /2
[1 0 -1 0 0] /2
[0 0 1 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.59

[0 0 0 0 1] /2
[1 0 -1 0 0] /2
[0 0 1 -1 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.60

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.60

[1 0 0 0 0] /2
[0 0 0 -1 1] /2
[0 1 1 1 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.61

-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1
0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.61

[0 0 1 0 0] /2
[1 -1 0 -1 1] /2
[1 0 0 0 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.62

-1 0 0 0 0	0 -1 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	-1 0 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1

O point-group tem ordem 8

comp. de translacao de TRI.62

[0 2 0 0 0] /4
[0 0 0 1 2] /4
[2 -2 0 2 0] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.63 a TRI.83

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

0 point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.63

[0 0 0 0 1] /2
[0 1 -1 0 1] /2
[1 1 0 0 0] /2
[1 0 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.64

[0 0 0 1 0] /2
[0 1 -1 0 0] /2
[0 0 0 0 1] /2
[1 0 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.65

[0 0 0 1 0] /2
[0 1 -1 0 1] /2
[0 0 0 0 1] /2
[1 0 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.66

[0 0 0 1 0] /2
[0 1 -1 0 0] /2
[0 1 0 0 1] /2
[1 0 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.67

[0 0 0 1 0] /2
[0 0 -1 0 1] /2
[1 0 0 0 0] /2
[1 1 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.68

[0 0 0 1 1] /2
[0 0 -1 0 1] /2
[1 0 0 0 0] /2
[1 1 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.69

[0 0 0 1 1] /2
[0 0 -1 1 1] /2
[1 0 0 0 0] /2
[1 1 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.70

[0 0 0 1 0] /2
[0 0 -1 0 1] /2
[1 0 1 0 0] /2
[1 1 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.71

[0 0 0 0 1] /2
[0 0 -1 0 1] /2
[1 0 0 0 0] /2
[1 1 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.72

[0 0 0 0 1] /2
[0 0 -1 1 1] /2
[1 0 0 0 0] /2
[1 1 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.73

[0 0 0 0 1] /2
[0 0 -1 0 1] /2
[1 1 0 0 0] /2
[1 1 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.74

[0 0 0 1 0] /2
[0 0 -1 1 0] /2
[0 0 0 0 1] /2
[1 1 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.75

[0 0 0 0 1] /2
[0 0 -1 1 0] /2
[1 0 0 0 1] /2
[1 1 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.76

[0 0 0 1 0] /2
[0 0 -1 1 0] /2
[0 0 1 0 1] /2
[1 1 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.77	comp. de translacao de TRI.78
[0 0 0 1 0] /2	[0 0 0 0 1] /2
[0 0 0 0 1] /2	[0 1 -1 1 1] /2
[1 0 0 0 0] /2	[0 1 0 0 0] /2
[1 1 1 0 0] /2	[1 0 0 0 0] /2

comp. de translacao de TRI.79	comp. de translacao de TRI.80
[0 0 0 1 1] /2	[0 0 0 0 1] /2
[0 1 -1 1 1] /2	[0 1 -1 0 0] /2
[0 1 0 0 0] /2	[1 0 0 0 0] /2
[1 0 0 0 0] /2	[1 0 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.81	comp. de translacao de TRI.82
[0 0 0 0 1] /2	[0 0 0 0 1] /2
[0 1 -1 1 0] /2	[0 1 -1 0 1] /2
[1 0 0 0 0] /2	[0 1 0 0 0] /2
[1 0 0 -1 0] /2	[1 0 0 -1 0] /2

comp. de translacao de TRI.83

[0 0 0 1 1] /2

[0 1 -1 0 1] /2

[0 1 0 0 0] /2

[1 0 0 -1 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.84 e TRI.85

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.84	comp. de translacao de TRI.85
[0 0 1 1 0] /2	[0 0 1 1 0] /2
[0 0 0 0 1] /2	[0 -1 0 0 1] /2
[0 1 0 0 0] /2	[0 1 0 0 0] /2
[1 0 0 -1 0] /2	[1 0 0 -1 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.86

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 -1 0 0
0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 -1	0 0 0 0 1

O point-group tem ordem 4

comp. de translacao de TRI.86

[1 0 0 0 0] /2
[0 0 0 -1 1] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.87 a TRI.94

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 0 1 0 0	0 1 0 0 0	0 0 1 0 0
0 0 -1 0 0	0 1 0 0 0	0 0 1 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.87

[-2 4 0 0 0] /4
[0 0 0 2 2] /4
[0 -2 2 0 0] /4
[1 2 2 0 0] /4

comp. de translacao de TRI.88

[-2 4 0 0 0] /4
[0 0 0 0 2] /4
[0 0 0 2 0] /4
[1 2 2 0 0] /4

comp. de translacao de TRI.89

[-2 4 0 0 0] /4
[0 0 0 0 2] /4
[2 0 0 2 0] /4
[1 2 2 0 0] /4

comp. de translacao de TRI.90

[-2 4 0 0 0] /4
[0 0 0 0 2] /4
[0 -2 2 2 0] /4
[1 2 2 0 0] /4

comp. de translacao de TRI.91

[-2 4 0 0 0] /4
[0 0 0 0 2] /4
[2 -2 2 2 0] /4
[1 2 2 0 0] /4

comp. de translacao de TRI.92

[-2 4 0 0 0] /4
[0 0 0 2 0] /4
[0 -2 2 0 0] /4
[1 2 2 0 -2] /4

comp. de translacao de TRI.93

[-2 4 0 0 0] /4
[0 0 0 0 2] /4
[0 0 0 2 0] /4
[1 2 2 0 -2] /4

comp. de translacao de TRI.94

[-2 4 0 0 0] /4
[0 0 0 0 2] /4
[2 0 0 2 0] /4
[1 2 2 0 -2] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.95

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 1 1	0 0 1 1 1	0 -1 0 1 1	0 1 0 -1 -1
0 0 -1 -1 -1	0 1 0 -1 -1	0 0 1 0 0	0 0 1 1 1
0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 1	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 1 0	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.95

[0 1 -2 -1 -1] /2
 [0 0 -1 -1 0] /2
 [0 2 1 0 0] /2
 [1 0 1 -1 -1] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.96

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 0 -1 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 -1 0 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 -1	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 -1 0	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.96

[0 -2 0 -1 -1] /2
 [0 0 0 1 0] /2
 [0 1 1 0 0] /2
 [1 0 0 0 0] /2

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.97 e TRI.98

1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 0 1 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 1 0 0 0	0 0 -1 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.97

[-2 0 0 0 0] /4
 [0 0 0 0 2] /4
 [-1 0 0 2 0] /4
 [0 -2 2 -2 0] /4

comp. de translacao de TRI.98

[-2 0 0 0 0] /4
 [0 0 0 0 2] /4
 [-1 0 0 2 2] /4
 [0 -2 2 -2 0] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA OS GRUPOS TRI.99 e TRI.100

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 -1 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 1 0 0 0
0 0 -1 0 0	0 -1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 1 0	0 0 0 -1 0	0 0 0 -1 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 -1

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.99

[-2 0 0 0 0] /4
 [1 0 0 0 0] /4
 [0 0 0 0 2] /4
 [0 -2 2 -2 0] /4

comp. de translacao de TRI.100

[-2 0 0 0 0] /4
 [1 0 0 2 0] /4
 [0 0 0 0 2] /4
 [0 -2 2 -2 0] /4

GERADORES DO POINT-GROUP PARA O GRUPO TRI.101

1 0 0 0 0	1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 1 0 0 0	0 -1 0 0 0
0 0 0 1 -1	0 0 1 1 0	0 0 0 -1 1	0 0 0 -1 1
0 0 0 -1 0	0 0 -1 0 -1	0 0 -1 0 -1	0 0 0 1 0
0 0 -1 -1 0	0 0 -1 0 0	0 0 0 0 -1	0 0 1 1 0

O point-group tem ordem 16

comp. de translacao de TRI.101

[-2 0 6 -6 0] /4
 [1 0 0 2 4] /4
 [0 2 2 2 0] /4
 [0 0 0 2 -2] /4

Bibliografia

- [1] Ambrose, W. e I. Singer, A Theorem on Holonomy. *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** (1953), 428-443
- [2] Auslander, L. e M. Kuranishi, On the holonomy group of locally Euclidean spaces. *Annals of Math.* **65** (1957), 411-415
- [3] Bachmuth, S., Automorphisms of free metabelian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **118** (1965), 93-104
- [4] Bergman, G., The diamond lemma for ring theory. *Adv. in Math.* **29** (1978), 178-218
- [5] Bieberbach, L., Über die Bewegungsgruppen der Euklideschen Räume I. *Math. Ann.* **70** (1911), 297-336
- [6] Bieberbach, L., Über die Bewegungsgruppen der Euklideschen Räume II. *Math. Ann.* **72** (1912), 400-412
- [7] Brown, H., An Algorithm for Determination of Space Groups. *Math. Computational* **23** (1969), 499-514
- [8] Brown, H., R. Bülow, J. Neubüser, H. Wondratschek e H. Zassenhaus, *Crystallographic groups of four-dimensional space*. Wiley, New York, 1978
- [9] Calabi, E., Closed locally euclidean four-dimensional manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.* **63** (1957), 135
- [10] Charlap, L., *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*. Springer-Verlag 1986
- [11] Cliff, G. e A. Weiss, Torsion Free Spaces Groups and Permutation Lattices for Finite Groups. *Contemporary Math.* **93** (1989), 123-132
- [12] Cobb, P., Manifolds with Holonomy Group $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ and first Betti number zero. *J. Differ. Geom.* **10** (1975), 221-224
- [13] Curtis, C. e I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Wiley-Interscience 1988
- [14] Gupta, C., IA-automorphisms of two generator metabelian groups. *Arch. Math.* **37** (1981), 106-112
- [15] Gupta, N. e S. Sidki, On Torsion-free Metabelian Groups with Commutator Quotients of Prime Exponent. to appear on *The International Journal of Algebra and Computation*
- [16] Hantzsche, W. e H. Wendt, Dreidimensionale Euklidische Raumformen. *Math. Ann.* **110** (1935), 593-611

- [17] Higman, G., The units of group rings. *Proc. Lond. Math. Soc.* **46** (1940), 231-248
- [18] Hiller, H. e C. Sah, Holonomy of flat manifolds with $b_1 = 0$. *Quart.J.Math.Oxford* **37** (1986), 177-187
- [19] Hiller, H., C. Marciniak, C. Sah e A. Szczepański, Holonomy of flat manifolds with $b_1 = 0$ II. *Quart.J.Math.Oxford* **38** (1987), 213-220
- [20] Hiss, G. e A. Szczepański, Holonomy groups of Bieberbach groups with finite outer automorphism groups. *Arch.Math.* **65** (1995), 8-14
- [21] Hiss, G. e A. Szczepański, Flat manifolds with only Finitely many Affinities. *Bull. Polish Acad. Sc. Math.* **45** (1997), 349-357
- [22] Jawson, S., *An Introduction to Mathematical Crystallography*. American Elsevier, New York, 1965
- [23] Opgenorth, J., W. Plesken e T. Schulz, Crystallographic Algorithms and Tables. *Acta Cryst. A54* (1998), 517-531
- [24] Lyndon, R. e P. Schupp, *Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag 1977
- [25] Magnus, W., A. Karrass e D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*. Dover Publications 1976
- [26] Sehgal, S., *Topics in Group Rings*. Marcel Dekker, Inc. 1978
- [27] Sehgal, S., *Units in Integral Group Rings*. Pitman Monog. and Surv. in Pure and App. Mathematics. Longman Scientific Technical 1993
- [28] Schönert, M. *et al.*, *GAP - Groups, Algorithms and Programming* - Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen.
- [29] Symonds, P., *Flat manifolds*. PhD Thesis, Cambridge University 1987
- [30] Szczepański, A., Euclidean Space Forms with the first Betti number equal to zero. *Quart. J. Math. Oxford(2)* **36** (1985), 489-493
- [31] Szczepański, A., Five dimensional Bieberbach groups with trivial centre. *Manuscripta Math.* **68** (1990), 191-208
- [32] Szczepański, A., Holonomy groups of five dimensional Bieberbach groups. *Manuscripta Math.* **90** (1996), 383-389
- [33] Szczepański, A., Outer Automorphism Groups of Bieberbach Groups. *Bull.Belg.Math.Soc.* **3** (1996), 585-593
- [34] Szczepański, A., Decomposition of Flat Manifolds. *Mathematika* **44** (1997), 585-593
- [35] Vasquez, A., Flat Riemannian Manifolds. *J. Differ. Geom.* **4** (1970), 367-382
- [36] Wolf, J., *Spaces of Constant Curvature*. Publish or Perish, Inc. 1984
- [37] Yau, S., Compact Flat Riemannian Manifolds. *J. Differ. Geom.* **6** (1972), 395-402
- [38] Zassenhaus, H., Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. *Comment. Math. Helv.* **21** (1948), 117-141